VII. *Sur la Stabilité de l'Équilibre des Figures Pyriformes affectées par une Masse Fluide en Rotation.*

By H. Poincaré, *Foreign Member R.S.*

Received October 29,—Read November 21, 1901.

Introduction.

J'ai publié autrefois dans le Tome 7 des 'Acta Mathematica' un mémoire sur l'équilibre d'une masse fluide en rotation. C'est à ce mémoire que je renverrai souvent dans la suite en écrivant simplement 'Acta.' Dans ce mémoire je décris en particulier une figure d'équilibre particulière qui est pyriforme, et que pour cette raison on peut appeler la poire (pear-shaped figure).

Cette figure, est-elle stable ? La question ne peut pas être regardée comme entièrement résolue. En effet, comme l'a fait remarquer M. Schwarzschild, le principe de l'échange des stabilités ne peut pas être appliqué à ce cas sans modification.

La condition de stabilité peut être présentée sous deux formes différentes. Soit U l'énergie potentielle de la masse fluide (ou plutôt ce que M. Darwin appelle l'énergie perdue), ω la vitesse de rotation, J le moment d'inertie. La quantité

$$U + \tfrac{1}{2}\omega^2 J$$

doit être minimum, ω *étant regardé comme donné.*

La condition est nécessaire et suffisante pour la stabilité séculaire, si on suppose que la masse est entraînée par frottement par un axe de rotation qui la traverse de part en part comme dans les expériences de Plateau. Elle est suffisante, mais elle n'est plus nécessaire, si on suppose que la masse est isolée dans l'espace (*cf.* 'Acta,' pp. 293, 295, 367, 369).

Voici la seconde forme. Soit $\mu = \omega J$, le moment de rotation de la masse fluide, la quantité

$$U - \frac{\mu^2}{2J}$$

devra être minimum, μ *étant regardé comme donné.*

La condition aussi énoncée est nécessaire et suffisante, si on suppose la masse isolée dans l'espace.

Cela posé, considérons la série des ellipsoïdes de Jacobi, et d'autre part la série des figures pyriformes. Nous aurons une figure de bifurcation qui appartiendra à la fois aux deux séries, et que nous appellerons le Jacobien critique.

Les figures pyriformes n'admettent pas le plan des xy pour plan de symétrie ; on doit donc regarder comme distinctes deux de ces figures, symétriques l'une de l'autre par rapport à ce plan. De sorte que les figures de la série pyriforme sont symétriques deux à deux, à l'exception bien entendu du Jacobien critique, qui admet le plan des xy pour plan de symétrie. Il est clair que pour deux figures symétriques les valeurs de ω, de J, et de U sont les mêmes.

L'ensemble des deux séries peut être représenté schématiquement par une droite représentant les ellipsoïdes de JACOBI, et par une courbe ayant cette droite pour axe de symétrie, et représentant les figures pyriformes. Le point d'intersection de la droite et de la courbe représente alors le Jacobien critique, et deux points symétriques de la courbe représentent deux figures symétriques.

Cela posé, si nous suivons la série des Jacobiens en allant du moins allongé au plus allongé, nous savons que ω va en décroissant, tandis que $\omega J = \mu$ va en croissant.

Si nous suivons la série pyriforme, il est évident que quand nous atteindrons le Jacobien critique, ω atteindra, soit un minimum, soit un maximum, et il en est de même de ωJ.

Si nous adoptons le premier critère de la stabilité fondé sur les minima de la fonction $U + \frac{1}{2}\omega^2 J$, le principe de l'échange des stabilités entendu comme il doit l'être, nous enseigne ceci.

La condition nécessaire et suffisante pour la stabilité séculaire, si l'on supposait la masse entraînée par la rotation d'un axe fixe comme dans les expériences de PLATEAU, serait que ω soit *maximum*, c'est-à-dire plus grand pour le Jacobien critique que pour les autres figures pyriformes.

Si ω est maximum, on aurait pour une valeur donnée de ω supérieure au maximum une seule figure d'équilibre, un Jacobien stable ; pour une valeur donnée de ω inférieure au maximum on en aura trois, un Jacobien instable et deux figures pyriformes stables.

Si au contraire ω est minimum, on aurait pour une valeur donnée de ω supérieure au minimum trois figures d'équilibre, deux pyriformes et instables, et une ellipsoïdale et stable ; pour une valeur inférieure au minimum on n'aurait plus qu'une figure d'équilibre ellipsoïdale et instable.

Si maintenant nous supposons la masse isolée dans l'espace, la condition reste suffisante, mais elle n'est plus nécessaire. Pour avoir une condition nécessaire et suffisante, il faut avoir recours au second critère fondé sur les minima de $U - \frac{\mu^2}{2J}$. Le principe de l'échange des stabilités nous apprend alors que la condition nécessaire et suffisante de la stabilité séculaire, c'est que ωJ soit *minimum*, c'est-à-dire, plus petit pour le Jacobien critique que pour les autres figures pyriformes.

Si ωJ est minimum on aura pour une valeur donnée de ωJ

inférieure au minimum : 1 Jacobien *stable*,
supérieure au minimum : 1 Jacobien *instable*, 2 figures pyriformes, *stables* et symétriques l'une de l'autre.

Si ωJ est maximum on aura pour une valeur donnée de ωJ

inférieure au maximum : 1 Jacobien *stable* et 2 figures pyriformes, *instables* et symétriques l'une de l'autre,
supérieure au maximum : 1 Jacobien instable.

La question à résoudre est donc de savoir si ωJ est maximum ou minimum ; mais elle ne peut être résolue que par un calcul compliqué. Supposons qu'une masse fluide homogène en rotation se refroidisse lentement, elle prendra successivement (dans la première hypothèse ωJ minimum) la forme d'un ellipsoïde de révolution de plus en plus aplati, puis celle d'un ellipsoïde de Jacobi, puis celle d'une poire.

Si au contraire on venait à reconnaître que ωJ est maximum et non minimum, on devrait conclure que cette masse après avoir pris la forme de divers ellipsoïdes de révolution, puis de divers ellipsoïdes de Jacobi, et avoir atteint finalement celle du Jacobien critique, subira tout à coup une déformation énorme et une série d'oscillations, par une sorte de catastrophe subite.

Diverses raisons contribuent à rendre la première hypothèse beaucoup vraisemblable ; néanmoins jusqu'ici la preuve n'est pas faite, et je déclare tout de suite que je ne l'apporte pas encore dans le présent travail.

Mais quelle que soit l'hypothèse qui doive triompher un jour, je tiens à mettre tout de suite en garde contre les conséquences cosmogoniques qu'on pourrait en tirer. Les masses de la nature ne sont pas homogènes, et si on reconnaissait que les figures pyriformes sont instables, il pourrait néanmoins arriver qu'une masse hétérogène fût susceptible de prendre une forme d'équilibre analogue aux figures pyriformes, et qui serait stable. Le contraire pourrait d'ailleurs arriver également.

À la suite d'une correspondance que j'ai eue avec M. Darwin, nous nous sommes mis l'un et l'autre à étudier la question, et pendant qu'il écrivait deux mémoires sur ce sujet, et que dans l'un de ces mémoires il déterminait les axes du Jacobien critique, j'obtenais des résultats qui sont l'objet du présent travail. J'ai formé l'inégalité qui doit être satisfaite pour qu'il y ait stabilité, mais je ne l'ai pas traduite en chiffres, parce que je me défie de mon habileté arithmétique, et que je ne suis pas un calculateur assez sûr.

Les notations dont je fais usage diffèrent, malheureusement, beaucoup de celles de M. Darwin ; elles se rapprochent de celles de mon mémoire des 'Acta' sans être tout à fait identiques, parce que je rapporte ici, pour plus de symétrie, les coordonnées elliptiques à l'ellipsoïde :

$$\frac{x^2}{\rho^2 - a^2} + \frac{y^2}{\rho^2 - b^2} + \frac{z^2}{\rho^2 - c^2} = 1,$$

et non plus à l'ellipsoïde

$$\frac{x^2}{\rho^2} + \frac{y^2}{\rho^2 - b^2} + \frac{z^2}{\rho^2 - c^2} = 1,$$

comme le faisaient LIOUVILLE et LAMÉ, et comme je l'ai fait moi-même dans le mémoire des 'Acta.' (Je suppose de plus $a^2 > b^2 > c^2$, au lieu de supposer $b^2 < c^2$.)

Les indices, que j'attribue aux fonctions de LAMÉ, ne sont pas non plus les mêmes que dans les 'Acta.' Les fonctions que j'appelle ici *

$$R_1,\ R_2,\ R_3,\ R_4,\ R_5,$$

s'appelaient dans les 'Acta':

$$R_0,\ R_1,\ R'_{2,0},\ R'_{2,2},\ R_{3,0}.$$

C'est la fonction $R'_{3,0} = R_5$, qui est la plus importante, parce que c'est elle qui sert à définir la figure pyriforme; on la désigne quelquefois sous le nom de "third zonal harmonic."

Les fonctions R sont toutes égales, soit à un polynôme entier en ρ^2, soit à un pareil polynôme multiplié par l'un des trois radicaux

$$\sqrt{(\rho^2 - a^2)}, \quad \sqrt{(\rho^2 - b^2)}, \quad \sqrt{(\rho^2 - c^2)}$$

soit à un pareil polynôme multiplié par deux de ces radicaux, soit à un pareil polynôme multiplié par ces trois radicaux.

Celles de ces fonctions qui sont égales à un polynôme en ρ^2 seront ce que nous appellerons plus loin des *fonctions de* LAMÉ *paires et uniformes.*

Calculs Préliminaires.

Soit

$$\frac{x^2}{\rho_0^2 - a^2} + \frac{y^2}{\rho_0^2 - b^2} + \frac{z^2}{\rho_0^2 - c^2} = 1$$

l'équation de l'ellipsoïde de JACOBI de bifurcation que j'appelle E_0; soient ρ, μ, ν les coordonnées elliptiques déduites de cet ellipsoïde; de sorte que $\rho = \rho_0$ est l'équation de E_0 en coordonnées elliptiques.

[* In the paper in the 'Acta' there is a slight inconsistency in the notation adopted, for in one part of the paper the first of the double suffixes to the R's denotes the degree of the harmonic, while in another part it is the second which has that meaning. Thus, for example, $R'_{2,0}$ is sometimes written $R'_{0,2}$. Further I do not find that R_0 is used explicitly in that paper.

It may be convenient to point out the identities of the R's used here with my notation, as used in "Ellipsoidal Harmonics" and "The pear-shaped Figure of Equilibrium." They are as follows:—

$$R_1 = \mathfrak{P}_0(\nu), \text{ a constant}; \ R_2 = \mathsf{P}_1{}^1(\nu); \ R_3 = \mathfrak{P}_2(\nu); \ R_4 = \mathfrak{P}_2^2(\nu); \ R_5 = \mathfrak{P}_3(\nu).$$

The identities of the S functions which occur below are:—

$S_1 = \mathfrak{Q}_0(\nu)$, $S_2 = 3\mathsf{Q}_1{}^1(\nu)$, $S_3 = 5\mathfrak{Q}_2(\nu)$, $S_4 = 5\mathfrak{Q}_2^2(\nu)$, $S_5 = 7\mathfrak{Q}_3(\nu)$.—G. H. DARWIN.]

On aura :

$$x^2 = \frac{(\rho^2 - a^2)(\mu^2 - a^2)(\nu^2 - a^2)}{(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)},$$

de même pour y^2 et z^2.

On en déduit :

$$\frac{dx}{d\rho} = \rho\sqrt{\frac{(\mu^2 - a^2)(\nu^2 - a^2)}{(\rho^2 - a^2)(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)}},$$

d'où :

$$A = \left(\frac{dx}{d\rho}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\rho}\right)^2 + \left(\frac{dz}{d\rho}\right)^2 = \frac{\rho^2(\mu^2 - \rho^2)(\nu^2 - \rho^2)}{(\rho^2 - a^2)(\rho^2 - b^2)(\rho - c^2)},$$

d'où pour le carré d'un élément d'arc quelconque :

$$ds^2 = A^2 d\rho^2 + B^2 d\mu^2 + C^2 d\nu^2,$$

où B et C sont formés avec μ et ν comme A avec ρ.

Il vient alors pour ΔV l'expression suivante :

$$ABC\Delta V = \frac{d}{d\rho}\left(\frac{BC}{A}\frac{dV}{d\rho}\right) + \frac{d}{d\mu}\left(\frac{AC}{B}\frac{dV}{d\mu}\right) + \frac{d}{d\nu}\left(\frac{AB}{C}\frac{dV}{d\nu}\right).$$

Nous désignerons les fonctions de LAMÉ par des indices.

R_1 se réduit à une constante ; R_2 à $\sqrt{(\rho^2 - a^2)}$; R_3 et R_4 sont les deux polynômes du première degré en ρ^2 ; R_5 est la troisième "zonal harmonic." *Il faut remarquer que les indices choisis ne sont pas les mêmes que dans le mémoire des 'Acta.'*

Les fonctions correspondantes S, M, N porteront les mêmes indices.

R_i^0 et S_i^0 seront les valeurs de R_i et S_i pour $\rho = \rho_0$.

Nous introduirons les variables elliptiques θ, θ_1, θ_2 par les équations

$$d\theta = \frac{\rho d\rho}{(\rho^2 - a^2)^{\frac{1}{2}}(\rho^2 - b^2)^{\frac{1}{2}}(\rho^2 - c^2)^{\frac{1}{2}}}$$

θ_1 et θ_2 étant formés avec μ et ν comme θ avec ρ.

Il vient alors :

$$ds^2 = \frac{1}{l^2}d\theta^2 + \frac{1}{l_1^2}d\theta_1^2 + \frac{1}{l_2^2}d\theta_2^2,$$

où :

$$l^2 = \frac{1}{(\mu^2 - \rho^2)(\nu^2 - \rho^2)}, \quad l_1^2 = \frac{1}{(\rho^2 - \mu^2)(\nu^2 - \mu^2)}, \quad l_2^2 = \frac{1}{(\rho^2 - \nu^2)(\mu^2 - \nu^2)}.$$

Formules relatives au Potentiel d'une Simple Couche.

Le potentiel à l'extérieur aura pour expression

$$V = \Sigma HR^0SMN,$$

les H étant des coefficients quelconques, et à l'intérieur

$$V = \Sigma HRS^0MN.$$

Si nous considérons maintenant les dérivées dV/dn estimées suivant la normale ; si nous convenons de représenter par des lettres accentuées les derivées prises par rapport à θ, il viendra, puisque $l = d\theta/dn$:—

A l'extérieur

$$\frac{dV}{dn} = \Sigma HR^0S'lMN$$

et à l'intérieur

$$\frac{dV}{dn} = \Sigma HS^0R'lMN.$$

La différence

$$\Sigma H(RS' - SR')lMN$$

représente $4\pi\delta$, δ étant la densité de la simple couche, et comme

$$SR' - RS' = 2n + 1$$

on aura

$$4\pi\delta = \Sigma H(2n + 1)lMN.$$

Si donc la densité a pour expression

$$\Sigma BlMN$$

le potentiel à la surface aura pour expression

$$\Sigma B\frac{4\pi}{2n + 1}R^0S^0MN.$$

Formules relatives au Potentiel d'une Double Couche.

Le potentiel à l'extérieur aura pour expression

$$V = \Sigma HSMN$$

et à l'intérieur

$$V = \Sigma H_1RMN$$

les coefficients étant différents. Comme la dérivée dV/dn devra être continue on aura :

$$\Sigma HS_0'MN = \Sigma H_1R'_0MN.$$

Posons $H = KR'_0$, $H_1 = KS'_0$; la différence entre les deux valeurs de V pour $\rho = \rho_0$ sera :

$$- \Sigma KMN(R_0'S_0 - S_0'R_0) = + \Sigma KMN(2n + 1).$$

Ce sera $- 4\pi\delta$, δ étant la densité de la double couche.

Energie de la Simple Couche.

Cette énergie est

$$\int \tfrac{1}{2} V S d\sigma$$

$d\sigma$ étant l'élément de surface.

Si
$$\delta = \Sigma BlMN, \qquad V = \Sigma \mathrm{B} \frac{4\pi}{2n+1} RSMN,$$
cela fera

$$2\pi \Sigma \frac{1}{2n+1} B^2 RS \int l M^2 N^2 d\sigma.$$

Energie de la Double Couche.

Je ne calculerai ici qu'une portion de cette énergie, à savoir l'intégrale

$$\tfrac{1}{2}\int d\tau \left[\left(\frac{dV}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dV}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dV}{dz}\right)^2\right]$$

étendue à tous les éléments $d\tau$ de l'espace *sauf ceux qui sont compris entre les deux surfaces infiniment voisines qui constituent la double couche.* Cette portion est égale à $\int \frac{1}{2} \frac{dV}{dn} \delta d\sigma$.

Si
$$\delta = \Sigma BMN, \qquad \frac{dV}{dn} = -\Sigma B \frac{4\pi}{2n+1} R'S'MNl,$$
d'où

$$-2\pi \Sigma \frac{1}{2n+1} B^2 R'S' \int l M^2 N^2 d\sigma.$$

Définition de la Poire.

Par les différents points de E_0, je mène des lignes normales aux ellipsoïdes homofocaux à E_0; c'est-à-dire des lignes $\mu =$ const., $\nu =$ const., et je les prolonge jusqu'à la rencontre avec la surface de la poire. Soit $d\sigma_0$ un élément de surface de E_0 et dv le volume engendré par les lignes ainsi menées par les différents points de $d\sigma_0$, le rapport

$$dv/d\sigma_0$$

sera une fonction de μ et de ν que je pourrai développer en série de Lamé sous la forme :

$$dv/d\sigma_0 = \Sigma l \xi_i M_i N_i.$$

Ce sont les coefficients ξ_i qui définissent la forme de la poire.

Parmi ces coefficients, je remarque :—

1. ξ_1, qui est nul, parce que le volume de la poire est égal à celui de E_0, ce qui s'écrit $\int dv = 0$.
2. ξ_5, qui est du premier ordre.
3. ξ_3 et ξ_4, qui sont du second ordre.
4. Les autres ξ_i, qui sont du second ordre, si la fonction M_i est paire, uniforme, et d'ordre supérieur ; et négligeables dans le cas contraire.

Assez fréquemment, et quand il n'en pourra résulter aucune confusion, je supprimerai l'indice 0 et *j'écrirai simplement $d\sigma$ et $dv/d\sigma$ au lieu de* $d\sigma_0$ et $dv/d\sigma_0$.

Définition de la Simple Couche C.

Je considère la couche attirante formée par tous les petits volumes dv, et située par conséquent entre la surface de la poire et celle de E_0. Je suppose que l'on concentre toute la masse attirante située dans cette couche sur la surface de E_0 ; nous aurons ainsi une simple couche attirante, la densité de la matière sur l'élément $d\sigma$ étant précisément $dv/d\sigma$.

L'attraction de cette simple couche, que j'appelle Σ, est à très peu près égale à celle de la couche C.

Je puis considérer l'attraction due à la couche C moins l'attraction due à la couche Σ ; elle peut être considérée comme due à une matière attirante en partie positive et en partie négative ; c'est ce que j'appellerai la matière $\mathfrak{M}$, comprenant la couche C prise positivement et la couche Σ changée de signe.

Calcul du Potentiel.

Le potentiel V pourra être décomposée en trois parties :

$$V = V_1 + V_2 + V_3.$$

V_1 potentiel de E_0 ; V_2 de Σ ; V_3 de $\mathfrak{M}$.

Voici quelle est l'expression analytique de V_1 et de V_2.

Pour V_1 :—

à l'extérieur de E_0

$$V_1 = A_1S_1M_1N_1 + A_3S_3M_3N_3 + A_4S_4M_4N_4\,,$$

à l'intérieur de E_0

$$V_1 = A'_1R_1M_1N_1 + A'_3R_3M_3N_3 + A'_4R_4M_4N_4 + A'_0\Pi,$$

les A et les A' étant des coefficients constants et Π le premier membre de l'équation de E_0.

Rappelons que V_1 est continue ainsi que ses dérivées du premier ordre ; d'où l'on peut conclure d'abord :

$$A_1 S_1^0 = A_1' R_1^0, \quad A_3 S_3^0 = A_3' R_3^0, \quad A_4 S_4^0 = A_4' R_4^0.$$

Je puis poser de même :

$$y^2 + z^2 = B_1 R_1 M_1 N_1 + B_3 R_3 M_3 N_3 + B_4 R_4 M_4 N_4 + B_0 \Pi$$

et j'aurai entre les coefficients B et A′ les relations suivantes :

$$A_3' + \tfrac{1}{2}\omega_0^2 B_3 = A_4' + \tfrac{1}{2}\omega_0^2 B_4 = 0$$

$$B_0 \Delta\Pi = 4\,; \quad A_0' \Delta\Pi = \Delta V_1 = -4\pi\,; \quad A_0' + \pi B_0 = 0.$$

Quant à V_2 nous aurons :

à l'extérieur de E_0 $\qquad V_2 = \Sigma \frac{4\pi}{2n+1} \xi_i R_i^0 S_i M_i N_i,$

à l'intérieur de E_0 $\qquad V_2 = \Sigma \frac{4\pi}{2n+1} \xi_i R_i S_i^0 M_i N_i.$

Calcul de l'Energie.

L'énergie totale comprend :—

1. *L'énergie due à l'attraction de* E_0 *sur lui-même.*
2. *L'énergie due au moment d'inertie de* E_0.

Ces deux parties ensemble forment W_0.

3. *L'énergie de* E_0 *par rapport à* Σ (plus l'énergie de rotation). Cette somme est nulle, car elle est du premier ordre par rapport aux ξ_i, et les termes du premier ordre doivent disparaître puisque E_0 est une figure d'équilibre.

4. *L'énergie de* Σ *par rapport à lui-même, qui est,* d'après le mémoire des 'Acta,' p. 318 :

$$2\pi\Sigma \frac{1}{2n+1} \xi_i^2 R_i^0 S_i^0 \Omega_i, \quad \Omega_i = \int l M_i^2 N_i^2 d\sigma.$$

5. *L'énergie de* E_0 *par rapport à* $\mathfrak{M}$, *plus l'énergie de rotation de* $\mathfrak{M}$; on en connaît les termes du premier ordre, qui sont nuls ; ceux du second ordre, qui d'après le mémoire des 'Acta,' p. 317, sont :

$$-2\pi\Sigma\tfrac{1}{3}\xi_i^2 R_2^0 S_2^0 \Omega_i,$$

mais il faut pousser le calcul plus loin ; soit donc

$$\int \left[V_1 + \tfrac{1}{2}\omega_0^2(y^2 + z^2)\right] d\tau,$$

ette énergie, où $d\tau$ représente l'élément de volume de $\mathfrak{M}$, de sorte que

$$d\tau = d\theta\, d\theta_1\, d\theta_2 \sqrt{-1}\,.\,(\mu^2 - \rho^2)(\rho^2 - \nu^2)(\nu^2 - \mu^2).$$

Soit $d\sigma_0$ un élément de la surface de E_0, $d\sigma$ l'élément correspondant de la surface d'un ellipsoïde E homofocal à E_0 (je considère deux éléments comme correspondants quand ils ont mêmes coordonnées elliptiques μ et ν).

Soit $d\lambda$ un élément de la courbe $\mu = \text{const.}$, $\nu = \text{const.}$, compris entre deux ellipsoïdes E et E' infiniment voisins et homofocaux à E_0 ; nous aurons

$$d\tau = d\lambda d\sigma = \frac{d\theta d\sigma}{l}.$$

D'autre part $l d\sigma = l_0\, d\sigma_0$, où

$$l = \frac{1}{(\rho^2 - \mu^2)^{\frac{1}{2}}(\rho^2 - \nu^2)^{\frac{1}{2}}}, \qquad l_0 = \frac{1}{(\rho_0{}^2 - \mu^2)^{\frac{1}{2}}(\rho_0{}^2 - \nu^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

Si nous posons $$[V_1 + \tfrac{1}{2}\omega_0{}^2(y^2 + z^2)] = P,$$

$$d\theta = du\, \frac{(\rho_0{}^2 - \mu^2)^{\frac{1}{2}}(\rho_0{}^2 - \nu^2)^{\frac{1}{2}}}{(\rho^2 - \mu^2)(\rho^2 - \nu^2)} = \frac{l^2 du}{l_0},$$

et que nous considérions un instant P comme fonction de u ; nous remarquerons d'abord que $d\tau = du\, d\sigma_0$.

Développons P par la formule de MacLaurin :

$$P = P_0 + u\frac{dP}{du} + \tfrac{1}{2}u^2\frac{d^2P}{du^2} + \tfrac{1}{6}u^3\frac{d^3P}{du^3}.$$

Il va sans dire que la variable auxiliaire u a été définie de façon à s'annuler pour $\rho = \rho_0$, et que dans P et ses dérivées on a fait $\rho = \rho_0$. Notre variable u variera donc de 0 à $dv/d\sigma$ quand on passera de la surface de E_0 à celle de la poire.

Alors nous avons pour la portion de l'énergie envisagée :

$$\int P du d\sigma_0 = \int P_0 \frac{dv}{d\sigma_0} d\sigma_0 + \tfrac{1}{2}\int\frac{dP}{du}\left(\frac{dv}{d\sigma_0}\right)^2 d\sigma_0 + \tfrac{1}{6}\int\frac{d^2P}{du^2}\left(\frac{dv}{d\sigma_0}\right)^3 d\sigma_0 + \tfrac{1}{24}\int\frac{d^3P}{du^3}\left(\frac{dv}{d\sigma_0}\right)^4 d\sigma_0.$$

Le premier terme est nul (puisque $\int dv = 0$), le second nous donnerait le terme du second ordre

$$-2\pi\Sigma\tfrac{1}{3}\xi_i{}^2 R_2{}^0 S_2{}^0 \Omega_i,$$

dont j'ai déjà donné l'expression d'après le mémoire des 'Acta.'

Le troisième va nous donner des termes en $\xi_5^2\, \xi_i$, et le quatrième un terme en ξ_5^4.

Je commence par rechercher les dérivées de P par rapport à u, en fonction des dérivées $d\rho/d\theta$, $d^2\rho/d\theta^2$.

On a

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dP}{du} &= \frac{dP}{d\theta}\frac{d\theta}{du} = \frac{dP}{d\theta}l, \text{ car } \frac{d\theta}{du} = l, \text{ pour } \rho = \rho_0 ; \\
\frac{d^2P}{du^2} &= \frac{dP}{d\theta}\frac{d^2\theta}{du^2} + \frac{d^2P}{d\theta^2}\left(\frac{d\theta}{du}\right)^2 \\
\frac{d^3P}{du^3} &= \frac{dP}{d\theta}\frac{d^3\theta}{du^3} + 3\frac{d^2P}{d\theta^2}\frac{d\theta}{du}\frac{d^2\theta}{du^2} + \frac{d^3P}{d\theta^3}\left(\frac{d\theta}{du}\right)^3
\end{aligned}\right\} \quad (1.)$$

Tout ce que je veux retenir pour le moment c'est que $d\theta/du$, $d^2\theta/du^2$, $d^3\theta/du^3$ sont des fonctions de μ^2 et de ν^2 symétriques, paires et *uniformes* (je veux dire par ce dernier mot qu'elles ne changent pas quand μ^2 ou ν^2 tournent autour des valeurs singulières a^2, b^2, ou c^2). Leur développement en séries de LAMÉ ne contiendra donc que des fonctions de LAMÉ paires et uniformes. Il en sera de même pour $d\rho/du$, $d^2\rho/du^2$, $d^3\rho/du^3$ qui entrent dans les formules :

$$\frac{dP}{du} = \frac{dP}{d\rho}\frac{d\rho}{du}; \quad \frac{d^2P}{du^2} = \frac{dP}{d\rho}\frac{d^2\rho}{du^2} + \frac{d^2P}{d\rho^2}\left(\frac{d\rho}{du}\right)^2, \text{ \&c. . . . . } \quad (1 \text{ bis}).$$

Nous supposons bien entendu dans les formules (1) et (1 *bis*) qu'on remplace partout ρ par ρ_0 à la fin du calcul.

Une autre difficulté provient de ce que P n'a pas la même expression analytique à l'intérieur ou à l'extérieur de E_0.

Si la couche était tout entière à l'intérieur de E_0 (ce qui ne pourrait avoir lieu que si on renonçait à l'hypothèse $\int dv = 0$) nous pourrions réduire P à Π, à un facteur constant près, nous aurions en effet :

$$P = (A_1' + \tfrac{1}{2}\omega_0^2 B_1) R_1 M_1 N_1 + (A_0' + \tfrac{1}{2}\omega_0^2 B_0)\,\Pi$$

le premier terme se réduit à une constante qui n'a pas de dérivées.

Il est aisé de voir que $d\Pi/d\rho$ se réduit à un terme en ρ ; de sorte que

$$\frac{d\Pi}{d\rho} = \rho\frac{d^2\Pi}{d\rho^2}; \qquad \frac{d^3\Pi}{d\rho^3} = 0.$$

Nos intégrales se réduiraient donc, à un facteur constant près, à

$$\frac{1}{6}\int\frac{d^2\Pi}{d\rho^2}\left(\frac{dv}{d\sigma}\right)^3 d\sigma\left[\rho_0\frac{d^2\rho}{du^2} + \left(\frac{d\rho}{du}\right)^2\right] + \frac{1}{24}\int\frac{d^2\Pi}{d\rho^2}\left(\frac{dv}{d\sigma}\right)^4 d\sigma\left[\rho_0\frac{d^3\rho}{du^3} + 3\frac{d\rho}{du}\frac{d^2\rho}{du^2}\right].$$

J'écris $d\sigma$ au lieu de $d\sigma_0$, en supprimant l'indice 0, devenu inutile.

Remarquons que les quantités entre crochets sont les dérivées première et seconde de $\rho\, d\rho/du$

Remarquons en outre que

$$\frac{dP}{d\rho}\frac{d\rho}{du} = -\frac{4\pi}{3l}R_2^0 S_2^0,$$

que $d\rho/du$ est proportionnel à l, et par conséquent $dP/d\rho$ et $d^2\Pi/d\rho^2$ à $1/l^2$.

Les termes qui nous intéressent sont :—

1. Dans $(dv/d\sigma)^3$ les termes $3\xi_5{}^2\Sigma\xi_i\, M_5{}^2N_5{}^2\, M_iN_i\, l^3$ qui donnent

$$\Sigma\, \tfrac{1}{2}\xi_5{}^2\xi_i \int \frac{d^2P}{d\rho^2}\frac{d}{du}\left(\rho\frac{d\rho}{du}\right) M_5{}^2N_5{}^2M_iN_il^3d\sigma.$$

Il suffira de prendre les fonctions M_iN_i qui sont paires et uniformes, puisque les développements de $M_5{}^2N_5{}^2$, $l^3d^2P/d\rho^2$ n'en contiennent pas d'autres. Si on se borne aux formules précédentes, où P est regardé comme proportionnel à Π, nous pourrons poser

$$\frac{d^2P}{d\rho^2} = \Pi_0\frac{1}{l^2},$$

M_0 étant une constante ; si nous développons alors :

$$\Pi_0\frac{d}{du}\left(\rho\frac{d\rho}{du}\right) M_5{}^2N_5{}^2 = \Sigma\eta_iM_iN,$$

en série de LAMÉ, on aura, pour les termes en question :

$$\Sigma\, \tfrac{1}{2}\xi_5{}^2\xi_i\eta_i\Omega_i.$$

Malheureusement toute la masse $\mathfrak{M}$ n'est pas à l'intérieur de E_0, c'est donc

$$l^2\frac{d^2P}{du^2}M_5{}^2N_5{}^2$$

qu'il faudrait développer ; et cette expression n'est égale à $M_0\dfrac{d}{du}\left(\rho\dfrac{d\rho}{du}\right) M_5{}^2N_5{}^2$ que pour les points intérieurs à E_0.

2. Dans $(dv/d\sigma)^4$ le terme $\xi_5{}^4l^4M_5{}^4N_5{}^4$ ce qui donne :

$$\tfrac{1}{24}\xi_5{}^4\int \frac{d^2P}{d\rho^2}l^4\frac{d^2}{du^2}\left(\rho\frac{d\rho}{du}\right) M_5{}^4N_5{}^4d\sigma.$$

Nous reviendrons sur tous ces points plus en détail.

6. *L'énergie de* Σ *par rapport à* $\mathfrak{M}$.

C'est

$$\int V_2 d\tau$$

étendu à $\mathfrak{M}$, c'est-à-dire étendu à C en supprimant ensuite les termes du second degré ; cela fait, puisque

$$\int V_2d\tau = \int V_2\,du\,d\sigma = \int V_2\frac{dv}{d\sigma}d\sigma + \tfrac{1}{2}\int\frac{dV_2}{du}\left(\frac{dv}{d\sigma}\right)^2d\sigma + \tfrac{1}{6}\int\frac{d^2V_2}{du^2}\left(\frac{dv}{d\sigma}\right)^3d\sigma,$$

cela fait, dis-je, puisqu'on doit supprimer les termes du second degré :

$$\tfrac{1}{2}\int\frac{dV_2}{du}\left(\frac{dv}{d\sigma}\right)^2d\sigma + \tfrac{1}{6}\int\frac{d^2V_2}{du^2}\left(\frac{dv}{d\sigma}\right)^3d\sigma.$$

Les dérivées dV_2/du, etc., se calculeraient comme dP/du, etc., et on y ferait à la fin du calcul $\rho = \rho_0$.

Les termes qui nous intéressent sont :

dans $(dv/d\sigma)^2$ $\qquad 2l^2\Sigma\xi_i\xi_5 M_5 N_5 M_i N_i \quad$ et $\quad l^2\xi_5{}^2 M_5{}^2 N_5{}^2$;

dans $(dv/d\sigma)^3$ $\qquad l^3\xi_5{}^3 M_5{}^3 N_5{}^3$.

Quant à V_2 nous devons distinguer le cas où $\mathfrak{M}$ est intérieur à E_0, et celui où $\mathfrak{M}$ est extérieur à E_0.

Dans le premier cas les termes intéressants sont :

$$\int l^2 \frac{4\pi}{7}\Sigma\xi_i\xi_5{}^2 M_5{}^2 N_5{}^2 M_i N_i R'_5 S_5 \frac{d\theta}{du}\,d\sigma$$

$$+ \Sigma\int l^2 \frac{2\pi}{2n+1}\,\xi_i\xi_5{}^2 M_5{}^2 N_5{}^2 M_i N_i R'_i S_i \frac{d\theta}{du}\,d\sigma$$

$$+ \tfrac{1}{6}\int l^3\xi_5{}^4 M_5{}^4 N_5{}^4 \frac{4\pi}{7}\left[R_5{}' S_5 \frac{d^2\theta}{du^2} + R_5{}'' S_5\left(\frac{d\theta}{du}\right)^2\right]d\sigma.$$

Dans le second cas ils deviennent :

$$\int l^2 \frac{4\pi}{7}\Sigma\xi_i\xi_5{}^2 M_5{}^2 N_5{}^2 M_i N_i R_5 S'_5 \frac{d\theta}{du}\,d\sigma$$

$$+ \Sigma\int l^2 \frac{2\pi}{n+1}\,\xi_i\xi_5{}^2 M_5{}^2 N_5{}^2 M_i N_i R_i S'_i \frac{d\theta}{du}\,d\sigma$$

$$+ \tfrac{1}{6}\int l^3\xi_5{}^4 M_5{}^4 N_5{}^4 \frac{4\pi}{7}\left[R_5 S'_5 \frac{d^2\theta}{du^2} + R_5 S''_5\left(\frac{d\theta}{du}\right)^2\right]d\sigma.$$

Si $\mathfrak{M}$ est en partie extérieure et en partie intérieure à E_0 il faudra employer une formule mixte.

7. L'énergie de $\mathfrak{M}$ par rapport à $\mathfrak{M}$.

Pour l'obtenir il faut calculer le potentiel de $\mathfrak{M}$ et d'abord revenir sur l'étude du potentiel d'une double couche.*

Considérons une double couche très mince, mais non infiniment mince. Elle se compose de deux surfaces attirantes, Σ et Σ', très peu différentes l'une de l'autre. Je considère une série de courbes que j'appelle C, de façon que par chaque point de l'espace passe une courbe C et une seule. Ordinairement on prend pour les courbes C les normales à Σ. Dans les applications qui vont suivre, je prendrai les courbes $\mu = $ const., $\nu = $ const.

Deux points de Σ et de Σ', se trouvant sur une même courbe C, sont dits *corre-*

* Je prie le lecteur de bien remarquer que pendant quelques pages, et jusqu'à nouvel avertissement, beaucoup de lettres n'ont plus la même signification que dans ce qui précède et dans ce qui suit.

spondants. L'hypothèse qui sert de définition à la double couche, c'est que les masses attirantes qui se trouvent sur un élément de Σ et sur l'élément correspondant de Σ' sont égales et de signe contraire.

Cela posé soit M un point de Σ, M' le point correspondant de Σ', soient V et V' le potentiel de la double couche en M et en M'. Il s'agit d'évaluer la différence $V - V'$.

1. Dans le cas où la double couche est infiniment mince, on a par un théorème bien connu :

$$V - V' = 4\pi\delta \,.\, MM' \,.\, \cos\gamma$$

δ étant la densité de la matière au point M, MM' la distance des deux points correspondants M et M', γ l'angle de la courbe C avec la normale à Σ.

Je rappelle d'ailleurs que si la courbe C est normale aux deux surfaces, c'est-à-dire si $\gamma = 0$, la dérivée normale dV/dn est continue, même quand on franchit la double couche ; et que par conséquent cette dérivée a même valeur à des infiniment petits près en deçà des deux surfaces, et au delà des deux surfaces.

2. Supposons maintenant que la double couche soit très mince, mais non infiniment mince. Nous la décomposerons en une infinité de doubles couches infiniment minces. Pour cela entre Σ et Σ' nous ferons passer une infinité de surfaces $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots, \Sigma_n$ (n très grand). Soit E un élément de Σ, et $E_1, E_2, \ldots, E_n, E'$ les éléments correspondants de $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots, \Sigma_n, \Sigma'$. Nous avons sur E une masse μ et sur E' une masse $-\mu$. Plaçons sur E_1 une masse $-\mu$ et une masse μ qui se détruiront ; faisons de même pour $E_2, E_3, \ldots, E_n$. Associons la masse $-\mu$ de E_1 avec la masse μ de E, faisons de même pour tous les autres éléments de E, nous obtiendrons une double couche formée par les deux surfaces Σ et Σ_1 ; je l'appelle K_1. De même en combinant la masse $-\mu$ de E_2 avec la masse μ de E_1, j'aurai une seconde double couche que j'appelle K_2, et ainsi de suite jusqu'à la double couche K_n due aux masses $-\mu$ de E_n et μ de E_{n-1}, et à la double couche K_{n+1} due aux masses $-\mu$ de E' et μ de E_n.

La double couche proposée est donc remplacée par $n + 1$ *doubles couches élémentaires.*

Soit alors v et v' les potentiels aux points M et M' d'une double couche élémentaire K ; soient P et P' les points où la courbe C qui joint M à M' perce les deux surfaces de cette double couche élémentaire K. Soient w et w' les potentiels de K aux points P et P'. Soit dl un élément de la ligne C, et dv/dl la dérivée du potentiel de K le long de cette ligne, nous aurons :

$$w - w' = 4\pi\delta_1 \,.\, PP' \cos\gamma_1,$$

δ_1 étant la densité au point P et γ_1 l'angle de C avec la normale

$$v - w = -\int_M^P \frac{dv}{dl}\, dl, \qquad w' - v' = -\int_{P'}^{M'} \frac{dv}{dl}\, dl.$$

Je puis donc écrire :

$$v - v' = 4\pi\delta_1 PP' \cos\gamma_1 - \int_M^{M'} \frac{dv}{dl}\, dl$$

parce que l'arc PP' est très petit par rapport à MM', à la condition d'attribuer sur cet arc à dv/dl la même valeur qu'au point P en dehors de la double couche. On peut observer que si $d\sigma$ est un élément de la surface Σ, $d\sigma_1$ l'élément correspondant de la surface à laquelle appartient P, on aura :

$$\delta d\sigma = \delta_1 d\sigma_1.$$

Nous pouvons donc écrire

$$V = \Sigma v, \qquad V' = \Sigma v'$$

d'où :

$$V - V' = 4\pi\delta \Sigma PP' \cos\gamma_1 \frac{d\sigma}{d\sigma_1} - \int_M^{M'} \Sigma \frac{dv}{dl}\, dl.$$

Le premier terme est de l'ordre de $\Sigma PP' = MM'$. Le second est de l'ordre de $(MM')^2$; car dr/dl est de l'ordre de PP' et $\Sigma \frac{dv}{dl}$ de l'ordre de $\Sigma PP' = MM'$. Nous pousserons l'approximation jusqu'à $(MM')^2$. Si comme nous le supposons la courbe C est normale à Σ, l'angle γ_1 sera de l'ordre de MM' ; nous pourrons donc remplacer $\cos\gamma_1$ par 1, l'erreur commise sur $V - V'$ sera de l'ordre de $(MM')^3$. Maintenant $\Sigma \frac{dv}{dl}$ sera sensiblement constant et égal à dV/dn, c'est-à-dire à la dérivée de V estimée suivant la normale au point M et du côté extérieur à la double couche comprise entre les deux surfaces Σ et Σ'.

Appliquons cela à l'évaluation du potentiel de $\mathfrak{M}$, et pour cela revenons encore à notre double couche $\Sigma\Sigma'$; soit M'' un point de C compris entre M et M' ; soit v'' le potentiel de la double couche élémentaire K au point M'', $V'' = \Sigma v''$ le potentiel de la double couche totale.

Supposons d'abord que M'' soit entre P' et M', nous aurons :

$$v - w = -\int_M^P \frac{dv}{dl}\, dl ; \qquad w' - v'' = -\int_{P'}^{M''} \frac{dv}{dl}\, dl$$

d'où :

$$v - v'' = 4\pi\delta_1 PP' \cos\gamma_1 - \int_M^{M''} \frac{dv}{dl}\, dl.$$

Si M'' est entre M et P, nous aurons simplement :

$$v - v'' = -\int_M^{M''} \frac{dv}{dl}\, dl.$$

Nous aurons donc encore

$$V - V'' = 4\pi\delta \Sigma PP' \cos\gamma_1 \frac{d\sigma}{d\sigma_1} - \int_M^{M''} \Sigma \frac{dv}{dl}\, dl,$$

mais avec cette condition que dans le premier terme du second membre la sommation ne doit être étendue qu'aux doubles couches élémentaires comprises entre M et M''. On aura comme plus haut :

$$\Sigma \frac{dv}{dl} = \frac{dV}{dn}, \qquad \cos\gamma_1 = 1.$$

D'autre part :

$$\frac{d\sigma}{d\sigma_1} = 1 + \frac{MP}{MM'}\left[\frac{d\sigma}{d\sigma'} - 1\right]$$

d'où nous tirerons :

$$V - V'' = 4\pi\delta \,.\, MM'' + 2\pi\delta\frac{MM''^2}{MM'}\left[\frac{d\sigma}{d\sigma'} - 1\right] - \frac{dV}{dn}MM''.$$

Nous poserons d'ailleurs

$$\frac{d\sigma}{d\sigma'} - 1 = kMM'$$

de façon que k soit fini, et que

$$V - V'' = 4\pi\delta \,.\, MM'' + 2\pi k\delta(MM'')^2 - \frac{dV}{dn}MM''.$$

Si le point M'' est au delà de M', on aura

$$V - V'' = 4\pi\delta MM' + 2\pi k\delta(MM')^2 - \frac{dV}{dn}MM''$$

et s'il est en deçà de M :

$$V - V'' = -\frac{dV}{dn}MM''.$$

Cela posé, partageons la couche C, qui est comprise entre la surface de E_0 et celle de la poire, en couches infiniment minces par une série de surfaces très rapprochées, que j'appelle $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_n$; A_0 coincidera avec E_0 et A_n avec la surface de la poire. J'appelle C_p la couche comprise entre A_{p-1} et A_p. Je suppose que l'on concentre la masse de C_p sur E_0 en suivant les lignes μ, $\nu =$ const., qui jouent ici le rôle que jouaient tout à l'heure les courbes C. J'appelle Σ_p la simple couche ainsi obtenue. Alors Σ est la somme de toutes les simples couches Σ_p. L'attraction de C_p, moins celle de Σ_p, est l'attraction d'une double couche D_p, et il est clair que $\mathfrak{M}$ est équivalent à l'ensemble de ces doubles couches.

Soit v le potentiel dûe à l'une des doubles couches D_p, soit δ_p la densité de Σ_p en un point M de E_0 ; soit P un point de A_p et M'' un point quelconque de $\mathfrak{M}$, M' un point de la surface de la poire. Les quatre points M, P, M' et M'' sont supposé situés sur une même courbe μ, $\nu =$ const. Si alors v et v'' sont les valeurs de v en M et en M'', nous aurons :

$$v - v'' = 4\pi\delta_p MM'' + 2\pi k\delta_p MM''^2 - \frac{dv}{dn}MM''$$

si M'' est entre M et P ; et

$$v - v'' = 4\pi\delta_p MP + 2\pi v\delta_p (MP)^2 - \frac{dv}{dn} MM''$$

si P est entre M et M''.

Soit $V = \Sigma v$ et $V'' = \Sigma v''$ les valeurs du potentiel de $\mathfrak{M}$ en M et en M'', nous aurons :

$$V - V'' = 4\pi[\Sigma'\delta_p MM'' + \Sigma''\delta_p MP] + 2\pi k[\Sigma'\delta_p(MM'')^2 + \Sigma''\delta_p(MP)^2] - \frac{dV}{dn} MM''.$$

Nous remarquerons dans les parenthèses du second membre deux signes de sommation différents Σ' et Σ'' ; le premier Σ' s'étendra à toutes les doubles couches situées entre M'' et la poire, le second Σ'' à toutes les doubles couches situées entre M'' et l'ellipsoïde E_0. Nous conserverons le signe Σ pour les sommations étendues à toutes les doubles couches.

Posons alors $MP = l$, de sorte que $-\delta_p d\sigma$ qui représente la masse de la partie de la couche C_p qui correspond à l'élément $d\sigma$ sera $d\sigma_p dl$, $d\sigma_p$ étant l'élément de A_p qui correspond à $d\sigma$; or

$$\frac{d\sigma}{d\sigma_p} - 1 = kl, \quad \text{d'où :} \quad \frac{d\sigma}{d\sigma_p} = \frac{1}{1 + kl} = 1 - kl,$$

d'où enfin

$$\delta_p = -(1 - kl)\, dl.$$

$$\Sigma'\delta_p \,.\, MM'' = MM'' \,.\, [(\tfrac{1}{2}k(MM)'^2 - MM') - (\tfrac{1}{3}k(MM'')^2 - MM'')]$$

$$\Sigma''\delta_p MP = \tfrac{1}{3}k(MM'')^3 - \tfrac{1}{2}(MM'')^2$$

$$\Sigma''\delta(MP)^2 = \tfrac{1}{4}k(MM'')^4 - \tfrac{1}{3}(MM'')^3$$

et si nous posons un instant pour abréger

$$MM' = \epsilon, \quad MM'' = \zeta$$

il viendra :

$$V - V'' = 4\pi\zeta(\tfrac{1}{2}k\epsilon^2 - \epsilon - \tfrac{1}{2}k\zeta^2 + \zeta) + 4\pi(\tfrac{1}{3}k\zeta^3 - \tfrac{1}{2}\zeta^2) + 2\pi k\zeta^2(\zeta - \epsilon) - \tfrac{2}{3}\pi k\zeta^3 - \zeta\frac{dV}{dn},$$

ou

$$V - V'' = 4\pi(\tfrac{1}{2}\zeta^2 - \zeta\epsilon) + 2\pi k(\tfrac{1}{3}\zeta^3 - \zeta^2\epsilon + \zeta\epsilon^2) - \zeta\frac{dV}{dn}.$$

L'énergie de $\mathfrak{M}$ sur $\mathfrak{M}$ sera représentée par l'intégrale :

$$\tfrac{1}{2}\int(V'' - V)\, d\tau,$$

étendue à tous les éléments $d\tau$ de C.

Or si par M″ je fais passer l'une de ces surfaces très peu différentes de Σ, et qui me servaient tout à l'heure à définir mes doubles couches, si j'appelle $d\sigma''$ l'élément de cette surface correspondant à $d\sigma$, nous aurons :

$$d\tau = d\sigma'' dMM'' = d\sigma'' d\zeta$$

et

$$d\sigma'' = d\sigma(1 - k\zeta).$$

L'intégrale à chercher est donc :

$$\int d\sigma d\zeta \left[2\pi(\zeta\epsilon - \tfrac{1}{2}\zeta^2) + \pi k(\zeta^2\epsilon - \zeta\epsilon^2 - \tfrac{1}{3}\zeta^3) - 2\pi k\zeta(\zeta\epsilon - \tfrac{1}{2}\zeta^2) + \tfrac{1}{2}\zeta\frac{dV}{dn}\right],$$

et elle doit être prise par rapport à ζ entre 0 et ϵ ; on trouve ainsi :

$$\int\left(\tfrac{2}{3}\pi\epsilon^3 - \tfrac{2}{3}\pi k\epsilon^4 + \tfrac{1}{4}\epsilon^2\frac{dV}{dn}\right)d\sigma.$$

Pour rendre la formule comparable à celles qui précèdent il faut exprimer ϵ et k en fonctions de $dv/d\sigma$ et de $d\sigma/du$, $d\theta/du$, etc.

Nous avons d'abord

$$dv = \int d\tau = d\sigma\int_0^\epsilon (1 - k\zeta)\, d\zeta = \epsilon - \tfrac{1}{2}k\epsilon^2,$$

d'où :

$$\epsilon = \frac{dv}{d\sigma} + \tfrac{1}{2}k\left(\frac{dv}{d\sigma}\right)^2, \qquad \epsilon^3 = \left(\frac{dv}{d\sigma}\right)^3 + \tfrac{3}{2}k\left(\frac{dv}{d\sigma}\right)^4,$$

et pour l'intégrale de l'énergie :

$$\int d\sigma\left[\tfrac{2}{3}\pi\left(\frac{dv}{d\sigma}\right)^3 + \tfrac{1}{3}\pi k\left(\frac{dv}{d\sigma}\right)^4 + \tfrac{1}{4}\frac{dV}{dn}\left(\frac{dv}{d\sigma}\right)^2\right].$$

Observons que le calcul a été fait dans l'hypothèse où la surface de la poire est extérieure à celle de E_0. Dans l'hypothèse contraire, il faudrait changer le signe des deux premiers termes et écrire

$$\int d\sigma\left[-\tfrac{2}{3}\pi\left(\frac{dv}{d\sigma}\right)^3 - \tfrac{1}{3}\pi k\left(\frac{dv}{d\sigma}\right)^4 + \tfrac{1}{4}\frac{dV}{dn}\left(\frac{dv}{d\sigma}\right)^2\right].$$

Il reste à calculer k. Reprenons la lettre l dans son sens primitif, de sorte que

$$l = \frac{1}{(\rho^2 - \mu^2)^{\frac{1}{2}}(\rho^2 - \nu^2)^{\frac{1}{2}}} \qquad l_0 = \frac{1}{(\rho_0^2 - \mu^2)^{\frac{1}{2}}(\rho_0^2 - \nu^2)^{\frac{1}{2}}},$$

$$\frac{d\theta}{du} = \frac{l^2}{l_0}.$$

Nous savons que k est défini par la relation

$$\frac{d\sigma''}{d\sigma} = 1 - k\zeta,$$

si nous reprenons les notations employées plus haut, nous devrons écrire u au lieu de ζ, $d\sigma$ au lieu de $d\sigma''$ et $d\sigma_0$ au lieu de $d\sigma$, et notre relation deviendra

$$\frac{d\sigma}{d\sigma_0} = 1 - ku; \qquad \text{or} \quad \frac{d\sigma}{d\sigma_0} = \frac{l_0}{l},$$

on a donc :

$$k = + \frac{l_0}{\rho^2}\frac{dl}{du} \qquad \frac{d^2\theta}{du^2} = \frac{2l}{l_0}\frac{dl}{du},$$

et enfin, puisque sur E_0 on a $l = l_0$

$$k = + \frac{1}{2l}\frac{d^2\theta}{du^2}\text{*}.$$

Cela posé, dans notre intégrale les termes qui nous intéressent sont :—

1. Dans $(dv/d\sigma)^3$ les termes $3\,\xi_5^2\,\Sigma\,\xi_i\,M_5^2N_5^2\,M_iN_i\,l^3$, qui donnent :

$$\Sigma 2\pi\xi_5^2\xi_i\int M_5^2N_5^2M_iN_i\,.\,l^3d\sigma$$

(j'écris $d\sigma$ en supprimant l'indice 0 devenu inutile).

2. Dans $(dv/d\sigma)^4$ le terme $\xi_5^4\,l^4\,M_5^4\,N_5^4$ qui donne :

$$+\tfrac{1}{6}\pi\xi_5^4\int\frac{d^2\theta}{du^2}l^3M_5^4N_5^4d\sigma.$$

3. Enfin dans $(dv/d\sigma)^2\,dV/du$ le terme intéressant se calculera en supposant tous les ξ nuls sauf ξ^5.

C'est la portion de l'énergie de la double couche que nous avons calculée au début de ce travail ; nous n'avons donc qu'à appliquer la formule établie au début.

D'après cette formule, si $\delta = \Sigma\,B\,MN$ est la densité de la double couche, cette portion de l'énergie sera :

$$-2\pi\Sigma\frac{B^2R'S'}{2n+1}\int l^2MN^2d\sigma.$$

Mais ici

$$\delta = \tfrac{1}{2}\left(\frac{dv}{d\sigma}\right)^2 = \tfrac{1}{2}l^2\xi_5^2M_5^2N_5^2.$$

Si donc

$$l^2M_5^2N_5^2 = \Sigma\beta MN$$

alors la portion cherchée de l'énergie sera :

$$\tfrac{1}{2}\pi\xi_5^4\Sigma\frac{\beta^2R'S'}{2n+1}\int lM^2N^2d\sigma.$$

* Je puis donc ici reprendre toutes les notations du début de ce travail, et que j'avais abandonnées momentairement, ainsi qu'il est expliqué dans la note de la page 345. On observera que k est une constante généralement négative.

Unification des Formules.

Une difficulté provient de ce que quelques-unes des formules précédentes ont une forme analytique différente suivant que l'élément $d\sigma$ de la surface de E_0 est au-dessous ou au-dessus de la poire. Il est permis toutefois de prévoir qu'il doit y avoir compensation, et que dans la formule finale nous retomberons toujours sur la même forme analytique. Il reste à voir comment se fait cette compensation.

Les termes d'où provient la difficulté sont (outre ceux dus à l'action de $\mathfrak{M}$ sur $\mathfrak{M}$) :—

1. L'énergie de E_0 sur $\mathfrak{M}$ dont l'expression est :

$$\int P \frac{dv}{d\sigma} d\sigma + \frac{1}{2} \int \frac{dP}{du} \left(\frac{dv}{d\sigma}\right)^2 d\sigma + \frac{1}{6} \int \frac{d^2P}{du^2} \left(\frac{dv}{d\sigma}\right)^3 d\sigma + \frac{1}{24} \int \frac{d^3P}{du^3} \left(\frac{dv}{d\sigma}\right)^4 d\sigma .$$

2. L'énergie de Σ sur $\mathfrak{M}$ dont l'expression est :

$$\frac{1}{2} \int \frac{dV_2}{du} \left(\frac{dv}{d\sigma}\right)^2 d\sigma + \frac{1}{6} \int \frac{d^2V_2}{du^2} \left(\frac{dv}{d\sigma}\right)^3 d\sigma .$$

J'observe que V_1, dV_1/du, V_2 sont continus quand on franchit la surface de E_0 et qu'il en est de même de

$$P - V_1 = \tfrac{1}{2}\omega_0^2 (y^2 + z^2)$$

et de toutes ses dérivées. Si donc j'appelle

$$D\frac{dV_1}{du^2}, \quad D\frac{d^3V_1}{du^3}, \quad D\frac{dV_2}{du}, \quad D\frac{d^2V_2}{du^2}$$

les sauts brusques subis par d^2V_1/du^2 quand on franchit cette surface, du dedans au dehors, la différence entre les deux formules qu'il s'agit de comparer sera :

$$\frac{1}{6} \int \left(\frac{dv}{d\sigma}\right)^3 D \frac{d^2V_1}{du^2} d\sigma + \frac{1}{24} \int \left(\frac{dv}{d\sigma}\right)^4 D \frac{d^3V_1}{du^3} d\sigma$$

pour l'action de E_0 sur $\mathfrak{M}$, et

$$\frac{1}{2} \int \left(\frac{dv}{d\sigma}\right)^2 D \frac{dV_2}{du} d\sigma + \frac{1}{6} \int \left(\frac{dv}{d\sigma}\right)^3 D \frac{d^2V_2}{du^2} d\sigma$$

pour l'action de Σ sur $\mathfrak{M}$.

Calcul de $D\dfrac{d^2V_1}{du^2}$.

Nous nous servirons pour ce calcul de l'équation suivante :—

$$D\Delta V_1 = 4\pi ,$$

puisque $\Delta V_1 = 0$ à l'extérieur, et -4π à l'intérieur.

Or si nous nous rappeions l'expression de ΔV_1 et que le D de $dV_1/d\mu$, $d^2V_1/d\mu^2$, $dV_1/d\nu$, $d^2V_1/d\nu^2$ est nul ; ainsi que celui de $dV_1/d\rho$, il vient :

$$ABC \,.\, D\Delta V_1 = D\frac{d}{d\rho}\left(\frac{BC}{A}\frac{dV_1}{d\rho}\right) = \frac{BC}{A}D\frac{d^2V_1}{d\rho^2},$$

d'où

$$D\frac{d^2V_1}{d\rho^2} = A^2 D\Delta V_1 = 4\pi A^2.$$

Donc

$$D\frac{d^2V_1}{du^2} = \frac{d^2\rho}{du^2}D\frac{dV_1}{d\rho} = \left(\frac{d\rho}{du}\right)^2 D\frac{d^2V_1}{d\rho^2} = 4\pi A^2\left(\frac{d\rho}{du}\right)^2 = 4\pi.$$

Calcul de $D\frac{d^3V_1}{du^3}$.

Calculons d'abord $D\frac{d^3V_1}{d\rho^3}$; pour cela nous nous servirons de :—

$$D\frac{d\Delta V_1}{d\rho} = 0\,.$$

Si nous observons que :

$$D\frac{d^2V_1}{d\mu^2} = D\frac{dV_1}{d\mu} = D\frac{d^2V_1}{d\mu d\rho} = D\frac{d^3V_1}{d\mu^2 d\rho} = 0\,,$$

et de même pour les dérivées correspondantes par rapport à ν, je puis écrire :

$$D\frac{d\Delta V_1}{d\rho} = D\frac{d}{d\rho}\left[\frac{1}{ABC}\frac{d}{d\rho}\left(\frac{BC}{A}\frac{dV_1}{d\rho}\right)\right]$$

Mais d'ailleurs on a :

$$Ad\rho = \frac{d\theta}{l} = du\frac{l}{l_0},$$

$$BC = H\frac{1}{l},$$

H étant indépendant de ρ ; nous pouvons donc écrire :

$$\frac{BC}{A}\frac{dV_1}{d\rho} = \frac{Hl_0}{l^2}\frac{dV_1}{du}\,;\ \frac{1}{ABC}\frac{d}{d\rho}\left(\frac{BC}{A}\frac{dV_1}{d\rho}\right) = \frac{l_0}{H}\frac{d}{du}\left(\frac{Hl_0}{l^2}\frac{dV_1}{du}\right) = l_0{}^2\frac{d}{du}\left(\frac{dV_1}{l^2du}\right)$$

$$0 = D\frac{d\Delta V_1}{du} = l_0^2 D\frac{d^2}{du^2}\left(\frac{dV_1}{l^2du}\right);\ \frac{1}{l^2}D\frac{d^3V_1}{du^3} - \frac{4dl}{l^3du}D\frac{d^2V_1}{du^2} = 0\,,$$

d'où enfin :

$$D\frac{d^3V_1}{du^3} = \frac{4dl}{ldu}4\pi = +16\pi k.$$

Calcul de $D\dfrac{dV_2}{du}$.

D'après la propriété fondamentale des surfaces attirantes, on a :

$$D\frac{dV_2}{du} = -4\pi\frac{dv}{d\sigma}.$$

Calcul de $D\dfrac{d^2V_2}{du^2}$.

Pour ce calcul nous nous servirons de

$$0 = D\Delta V_2 = D\left[\frac{1}{ABC}\frac{d}{d\rho}\left(\frac{BC}{A}\frac{dV_2}{d\rho}\right)\right] = l_0{}^2 D\frac{d}{du}\left(\frac{dV_2}{l^2du}\right)$$

$$\frac{1}{l^2}D\frac{d^2V_2}{du^2} - \frac{2dl}{l^3du}D\frac{dV_2}{du} = 0$$

d'où enfin,

$$D\frac{d^2V_2}{du^2} = -4\pi\frac{dv}{d\sigma}\frac{2dl}{ldu} = -8\pi k\frac{dv}{d\sigma}.$$

En résumé la différence entre les deux formules qu'il s'agit d'identifier sera :—

1. Pour l'action de E sur $\mathfrak{M}$

$$\tfrac{1}{6}\int\left(\frac{dv}{d\sigma}\right)^3 D\frac{d^2V_1}{du^2}d\sigma + \tfrac{1}{24}\int\left(\frac{dv}{d\sigma}\right)^4 D\frac{d^3V_1}{du^3}d\sigma = \tfrac{2}{3}\pi\int\left(\frac{dv}{d\sigma}\right)^3 d\sigma + \tfrac{2}{3}\pi\int k\left(\frac{dv}{d\sigma}\right)^4 d\sigma.$$

2. Pour l'action de Σ sur $\mathfrak{M}$

$$\tfrac{1}{2}\int\left(\frac{dv}{d\sigma}\right)^2 D\frac{V}{du}\,a\sigma + \tfrac{1}{6}\int\left(\frac{dv}{d\sigma}\right)^3 D\frac{d^2V_2}{du^2}d\sigma = -2\pi\int\left(\frac{dv}{d\sigma}\right)^3 d\sigma - \tfrac{4}{3}\pi\int k\left(\frac{dv}{d\sigma}\right)^4 d\sigma.$$

3. Pour l'action de $\mathfrak{M}$ sur $\mathfrak{M}$

$$\int d\sigma\left[\tfrac{2}{3}\pi\left(\frac{dv}{d\sigma}\right)^3 + \tfrac{1}{3}\pi k\left(\frac{dv}{d\sigma}\right)^4 + \tfrac{1}{4}\frac{dV}{du}\left(\frac{dv}{d\sigma}\right)^2\right] - \int d\sigma\left[-\tfrac{2}{3}\pi\left(\frac{dv}{d\sigma}\right)^3 - \tfrac{1}{3}\pi k\left(\frac{dv}{d\sigma}\right)^4 + \tfrac{1}{4}\frac{dV}{du}\left(\frac{dv}{d\sigma}\right)^2\right]$$

$$= \tfrac{4}{3}\pi\int\left(\frac{dv}{d\sigma}\right)^3 d\sigma + \tfrac{2}{3}\pi\int k\left(\frac{dv}{d\sigma}\right)^4 d\sigma.$$

soit au total zéro.

Nous pourrons donc employer indifféremment l'une ou l'autre formule sans nous inquiéter de savoir si la poire est au dessus ou au dessous de l'ellipsoïde, pourvu que l'on se serve des formules correspondantes pour le calcul de tous les termes.

Nous choisirons désormais l'hypothèse intérieure.

Groupement des Formules.

Nous allons maintenant grouper ensemble les termes de même forme, afin d'additionner leurs coefficients.

Nous avons d'abord à envisager les termes en $\xi_i \xi_5^2$; le premier que nous trouvons est :—

$$\tfrac{1}{2}\xi_5{}^2\xi_i \int \frac{d^2P}{d\rho^2}\frac{d}{du}\left(\rho\frac{d\rho}{du}\right) M_5{}^2 N_5{}^2 M_i N_i l^3 d\sigma.$$

Nous avons posé

$$\frac{d^2P}{d\rho^2} = \frac{\Pi_0}{l^2},$$

Π_0 étant une constante. Nous avons d'autre part :—

$$\frac{d\rho}{du} = \frac{d\rho}{d\theta}\frac{d\theta}{du} = \frac{(\rho^2-a^2)^{\frac{1}{2}}(\rho^2-b^2)^{\frac{1}{2}}(\rho^2-c^2)^{\frac{1}{2}}}{\rho}\,\frac{(\rho_0{}^2-\mu^2)^{\frac{1}{2}}(\rho_0{}^2-\nu^2)^{\frac{1}{2}}}{(\rho^2-\mu^2)(\rho^2-\nu^2)} = \frac{f(\rho)}{\rho}\frac{l^2}{l_0}$$

en désignant par $f(\rho)$ une fonction de ρ et par l_0 ce que devient l pour $\rho = \rho_0$. Nous déduisons de là :—

$$\frac{d}{du}\left(\rho\frac{d\rho}{du}\right) = f'(\rho)\frac{d\rho}{du}\frac{l^2}{l_0} + f(\rho)\frac{2l\,dl/du}{l_0} = \frac{ff'}{l}\frac{l^4}{l_0{}^2} + 2f(\rho)\frac{l\,dl/du}{l_0}$$

et pour $\rho = \rho_0$:

$$\frac{d}{du}\left(\rho\frac{d\rho}{du}\right) = \frac{ff'}{\rho}l^2 + 2f(\rho)\frac{dl}{du}.$$

Qu'est-ce maintenant que dl/du pour $\rho = \rho_0$?

On trouve

$$\frac{dl}{du} = \frac{dl}{d\rho}\frac{d\rho}{du} = \frac{f(\rho)}{\rho}\frac{dl}{d\rho}\frac{l^2}{l_0} = \frac{f(\rho)}{\rho}l\frac{dl}{d\rho}.$$

Calculons encore la dérivée seconde :

$$\frac{d^2}{du^2}\left(\rho\frac{d\rho}{du}\right).$$

Nous venons de trouver :

$$\frac{d}{du}\left(\rho\frac{d\rho}{du}\right) = \frac{ff'}{\rho}\frac{l^4}{l_0^2} + \frac{2f^2}{\rho}\frac{l^3\dfrac{dl}{d\rho}}{l_0^2}.$$

On trouve de même :

$$\frac{d^2}{du^2}\left(\rho\frac{d\rho}{du}\right) = \frac{d}{d\rho}\left(\frac{ff'}{\rho}\right)\frac{f}{\rho}\frac{l^6}{l_0^3} + \left(\frac{8f^2f'}{\rho^2} - \frac{2f^3}{\rho^3}\right)\frac{l^5\dfrac{dl}{d\rho}}{l_0^3} + \frac{6f^3}{\rho^2}\frac{l^4\left(\dfrac{dl}{d\rho}\right)^2}{l_0^3} + \frac{2f^3}{\rho^2}\frac{l^5\dfrac{d^2l}{d\rho^2}}{l_0^3}$$

ou pour $\rho = \rho_0$:

$$\frac{d^2}{du^2}\left(\rho\frac{d\rho}{du}\right) = \frac{f}{\rho}\frac{d}{d\rho}\left(\frac{ff'}{\rho}\right)l^3 + \left(\frac{8f^2f'}{\rho^2} - \frac{2f^3}{\rho^3}\right)l^2\frac{dl}{d\rho} + \frac{2f^3}{\rho^2}\left[3l\left(\frac{dl}{d\rho}\right)^2 + l^2\frac{d^2l}{d\rho^2}\right]$$

Posons

$$\Pi_0\frac{ff'}{\rho} = \mathfrak{A}_1\,; \quad \Pi_0\frac{f^2}{\rho} = \mathfrak{B}.$$

$\mathfrak{A}_1$ et $\mathfrak{B}$ seront des constantes dépendant seulement de ρ et faciles à calculer. On aura, pour $\rho = \rho_0$:

$$\Pi_0\frac{d}{du}\left(\rho\frac{d\rho}{du}\right) = \mathfrak{A}_1 l^2 + 2\mathfrak{B}l\frac{dl}{d\rho}.$$

Or nous avons posé plus haut :

$$\Pi_0\frac{d}{du}\left(\rho\frac{d\rho}{du}\right)M_5{}^2N_5{}^2 = \Sigma\eta_i M_i N_i$$

et nous avons trouvé que le coëfficient cherché était égal à $\frac{1}{2}\eta_i\Omega_i$, nous avons posé un peu plus loin :—

$$l^2M_5{}^2N_5{}^2 = \Sigma\beta_i M_i N_i.$$

En rapprochant toutes ces formules, nous trouvons :—

$$\eta_i = \mathfrak{A}_1\beta_i + \mathfrak{B}\frac{d\beta_i}{d\rho}.$$

Nous avons trouvé ensuite comme terme en $\xi_i\,\xi_5^2$:

$$\frac{4\pi}{7}\int l^2M_5{}^2N_5{}^2M_iN_i\frac{d\theta}{du}R_5'S_5d\sigma + \frac{2\pi}{2n+1}R_i'S_i\int l^2M_5{}^2N_5{}^2M_iN_i\frac{d\theta}{du}d\sigma.$$

Si nous observons que $d\theta/du$ se réduit à l pour $\rho = \rho_0$, nous trouverons pour le coëfficient en question :

$$\pi\beta_i\Omega_i\left(\tfrac{4}{7}R'_5S_5 + \frac{2}{2n+1}R_i'S_i\right)$$

Enfin dans l'énergie de $\mathfrak{M}$ sur $\mathfrak{M}$ nous avons encore un terme en $\xi_i\,\xi_5^2$, qui a pour coëfficient :

$$-2\pi\int M_5{}^2N_5{}^2M_iN_il^3d\sigma = -2\pi\beta_i\Omega_i.$$

Je prends le signe — parce que j'ai adopté l'hypothèse d'après laquelle $\mathfrak{M}$ est intérieur à E_0.

En réunissant tous ces termes, je trouve que le coëfficient définitif de $\xi_i\,\xi_5^2$ est

$$\beta_i\Omega_i\left(\mathfrak{A}_1 + \frac{4}{7}\pi\,R'_5S_5 + \frac{2}{2n+1}\pi\,R'_iS_i + 2\pi\right) + \mathfrak{B}\Omega_i\frac{d\beta_i}{d\rho}.$$

Remarquons encore que nous avons trouvé :—

$$\frac{dP}{d\rho}\frac{d\rho}{du} = \frac{\rho}{l^2}\Pi_0\frac{d\rho}{du} = -\frac{4\pi}{3l}R_2S_2.$$

Nous pouvons en déduire :

$$\mathfrak{A}_1 = -\tfrac{4}{3}\pi R_2 S_2 \frac{f'}{\rho}; \quad \mathfrak{B} = -\tfrac{4}{3}\pi R_2 S_2 \frac{f}{\rho}.$$

Je rappelle que $\frac{4}{3}\pi f$ n'est autre chose que le volume de E_0.

Passons maintenant aux termes en ξ_5^4 ; le premier que nous rencontrons a pour coëfficient l'intégrale :

$$\frac{1}{24}\int\frac{d^2P}{d\rho^2}l^4\frac{d^2}{du^2}\left(\rho\frac{d\rho}{du}\right)M_5{}^4N_5{}^4\,d\sigma = \frac{\Pi_0}{24}\int l^2\frac{d^2}{du^2}\left(\rho\frac{d\rho}{du}\right)M_5{}^4N_5{}^4d\sigma.$$

Supposons que l'on veuille développer en série de Lamé la fonction

$$l^4M_5{}^3N_5{}^3$$

et soit

$$l^4M_5{}^3N_5{}^3 = \Sigma\Gamma_iM_iN_i$$

les Γ_i étant certains coëfficients, qui naturellement dépendront de ρ, nous en déduirons :—

$$4l^3\frac{dl}{d\rho}M_5{}^3N_5{}^3 = \Sigma\frac{d\Gamma_i}{d\rho}M_iN_i$$

$$4\left[3l^2\left(\frac{dl}{d\rho}\right)^2 + l^3\frac{d^2l}{d\rho^2}\right]M_5{}^3N_5{}^3 = \Sigma\frac{d^2\Gamma_i}{d\rho^2}M_iN_i.$$

Il est clair alors que nous aurons pour le seul coëfficient qui nous intéresse, qui est Γ_5 et que je désignerai simplement par Γ :—

$$\Omega_5\Gamma_5 = \Omega_5\Gamma = \int l^5M_5{}^4N_5{}^4d\sigma;$$

$$\Omega_5\frac{d\Gamma}{d\rho} = 4\int l^4\frac{dl}{d\rho}M_5{}^4N_5{}^4d\sigma; \quad \Omega_5\frac{d^2\Gamma}{d\rho^2} = 4\int\left[3l^3\left(\frac{dl}{d\rho}\right)^2 + l^4\frac{d^2l}{d\rho^2}\right]M_5{}^4N_5{}^4d\sigma.$$

Cela nous montre, en rapprochant de l'expression de $\frac{d^2}{du^2}\left(\rho\frac{d\rho}{du}\right)$, que si nous posons pour abréger :

$$\mathfrak{C}_1 = \frac{\Pi_0 f}{24\rho}\frac{d}{d\rho}\left(\frac{ff'}{\rho}\right); \quad \mathfrak{D}_1 = \frac{\Pi_0}{48}\left(\frac{4f}{\rho^2} - \frac{f^3}{\rho^3}\right); \quad \mathfrak{E}_1 = \frac{\Pi_0}{48}\frac{f^3}{\rho^2}.$$

le coëfficient du terme envisagé en ξ_5^4 sera :

$$\mathfrak{C}_1\Gamma\Omega_5 + \mathfrak{D}_1\frac{d\Gamma}{d\rho}\Omega_5 + \mathfrak{E}_1\frac{d^2\Gamma}{d\rho^2}\Omega_5.$$

Vient ensuite comme terme en ξ_5^4

$$\frac{4\pi}{7}\frac{1}{6}\int l^3 M_5{}^4 N_5{}^4\left[R'_5 S_5\frac{d^2\theta}{du^2}+R''_5 S_5\left(\frac{d\theta}{du}\right)^2\right]d\sigma.$$

Pour le calcul de ce coëfficient, il nous faut $d^2\theta/du^2$, quant à $(d\theta/du)^2$ c'est l^2. Or nous avons :

$$\frac{d\theta}{du}=\frac{l^2}{l_0};\quad \frac{d^2\theta}{du^2}=\frac{2l}{l_0}\frac{dl}{d\rho}\frac{d\rho}{du}=2l\frac{dl}{d\rho}\frac{f}{\rho},$$

ce qui nous donne en définitive pour le coëfficient cherché :

$$\frac{2\pi}{21}R''_5 S_5\Gamma\Omega_5+\frac{\pi}{21}R'_5 S_5\frac{f}{\rho}\frac{d\Gamma}{d\rho}\Omega_5.$$

Enfin dans l'énergie de $\mathfrak{M}$ sur $\mathfrak{M}$, nous avons deux termes en ξ_5^4, le premier a pour coëfficient

$$-\tfrac{1}{6}\pi\int\frac{d^2\theta}{du^2}l^3 M_5{}^4 N_5{}^4 d\sigma=-\tfrac{1}{12}\pi\frac{f}{\rho}\frac{d\Gamma}{d\rho}\Omega_5,$$

(je prends le signe $-$ à cause de l'hypothèse intérieure) et le second

$$-\tfrac{1}{2}\pi\Sigma\frac{\beta_i^2 R'_i S'_i}{2n+1}\Omega_i.$$

En réunissant tous ces termes, nous trouvons finalement pour le coëfficient de ξ_5^4 :—

$$\left[\mathfrak{C}_1+\tfrac{2}{21}\pi R''_5 S_5\right]\Gamma\Omega_5+\left[\mathfrak{D}_1+\tfrac{1}{21}\pi\frac{f}{\rho}R'_5 S_5-\tfrac{1}{12}\pi\frac{f}{\rho}\right]\frac{d\Gamma}{d\rho}\Omega_5$$
$$+\mathfrak{E}_1\frac{d^2\Gamma}{d\rho^2}\Omega_5-\tfrac{1}{2}\pi\Sigma\frac{1}{2\pi+1}B_i^2 R'_i S'_i\Omega_i.$$

Observons que $R''_5 S_5$ est égal à $R_5 S_5$ au facteur constant près R''_5/R_5, qui est égal d'après l'équation de Lamé à un polynôme connu du second ordre en ρ^2. D'ailleurs $R_5 S_5$ est égal au facteur $\frac{7}{3}$ près à $R_2 S_2$, qui figure dans l'expression de Π_0, et cela parce que le coëfficient de stabilité correspondant à R_5 doit s'annuler pour l'ellipsoïde E_0.

Calcul du Moment d'Inertie.

Le calcul de J est plus facile ; nous avons en effet

$$J=\int(y^2+z^2)\,d\tau$$

l'intégrale étant étendue à tous les éléments $d\tau$ de la poire ; le moment d'inertie de l'ellipsoïde E_0 sera

$$J_0 = \int (y^2 + z^2)\, d\tau$$

l'intégrale étant étendue à tous les éléments $d\tau$ de l'ellipsoïde, et la différence $J - J_0$ sera la même intégrale étendue à tous les éléments de la couche comprise entre l'ellipsoïde et la poire. Posons

$$Q = y^2 + z^2 = Q_0 + u\frac{dQ}{du} + \ldots$$

Nous aurons

$$J - J_0 = \int Q\, du d\sigma = \int \left(Q_0 + u\frac{dQ}{du}\right) du d\sigma = \int Q_0 \frac{dv}{d\sigma}\, d\sigma + \tfrac{1}{2}\int \frac{dQ}{du}\left(\frac{dv}{d\sigma}\right)^2 d\sigma.$$

Il nous faut donc calculer Q_0 et dQ/du, nous avons posé plus haut

$$Q = B_1 R_1 M_1 N_1 + B_3 R_3 M_3 N_3 + B_4 R_4 M_4 N_4 + B_0\,\Pi.$$

Pour $\rho = \rho_0$, Π est nul ; de sorte que :

$$Q_0 = B_1 R_1^0 M_1 N_1 + B_3 R_3^0 M_3 N_3 + B_4 R_4^0 M_4 N_4.$$

Comme les fonctions R ne sont définies qu'à un facteur constant près, nous pouvons supposer que $R_1 = 1$, et que le coëfficient de ρ^2 dans R_3 et dans R_4 est égal à 1.

On trouve d'autre part :

$$\frac{dQ}{d\rho} = 2\rho\left[\frac{(\mu^2 - b^2)(\nu^2 - b^2)}{(b^2 - a^2)(b^2 - c^2)} + \frac{(\mu^2 - c^2)(\nu^2 - c^2)}{(c^2 - a^2)(c^2 - b^2)}\right]$$

d'où :

$$\frac{dQ}{du} = 2fl\left[\frac{(\mu^2 - b^2)(\nu^2 - b^2)}{(b^2 - a^2)(b^2 - c^2)} + \frac{(\mu^2 - c^2)(\nu^2 - c^2)}{(c^2 - a^2)(c^2 - b^2)}\right].$$

Cette expression peut facilement se mettre sous la forme :

$$\frac{dQ}{du} = C_1 l M_1 N_1 + C_3 l M_3 N_3 + C_4 l M_4 N_4,$$

où les C sont des coëfficients numériques faciles à déterminer.

Nous trouvons d'abord :

$$\int Q_0 \frac{dv}{d\sigma}\, d\sigma = \int l\, d\sigma\,(B_1 R_1^0 M_1 N_1 + B_3 R_3^0 M_3 N_3 + B_4 R_4^0 M_4 N_4)\,\Sigma \xi_i M_i N_i\,.$$

d'où :

$$\int Q_0 \frac{dv}{d\sigma}\, d\sigma = \xi_1 B_1 R_1^0 \Omega_1 + \xi_3 B^3 R_3^0 \Omega_3 + \xi_4 B_4 R_4^0 \Omega_4 = \xi_3 B_3 R_3^0 \Omega_3 + \xi_4 B_4 R_4^0 \Omega$$

(car nous savons que ξ_1 est nul).

Passons au calcul de

$$\tfrac{1}{2}\int \frac{dQ}{du}\left(\frac{dv}{d\sigma}\right)^2 d\sigma\,.$$

Nous pouvons réduire $(dv/d\sigma)^2$ au terme unique :

$$\xi_5^2 l^2 M_5^2 N_5^2\,.$$

Le terme cherché se réduit donc à :

$$\tfrac{1}{2}\,\xi_5^2\int l^3 M_5^2 N_5^2\,(C_1 M_1 N_1 + C_3 M_3 N_3 + C_4 M_4 N_4)\,d\sigma$$

c'est-à-dire à :

$$\tfrac{1}{2}\xi_5^2\,(C_1\beta_1\Omega_1 + C_3\beta_3\Omega_3 + C_4\beta_4\Omega_4)$$

de sorte que finalement :

$$J = J_0 + \xi_3 B_3 R_3^0\Omega_3 + \xi_4 B_4 R_4^0\Omega_4 + \tfrac{1}{2}\xi_5^2\,(C_1\beta_1\Omega_1 + C_3\beta_3\Omega_3 + C_4\beta_4\Omega_4)\,.$$

Le calcul des coëfficients $B_3R_4^0\Omega_3$ et $B_4R_4^0\Omega_4$ est aisé.

Si en effet a_1, b_1, c_1, sont les trois axes d'un ellipsoïde, on sait que son moment d'inertie est :

$$J = \frac{4\pi}{15}\,a_1b_1c_1\,(b_1^2 + c_1^2)$$

d'où :

$$\frac{dJ}{da_1} = \frac{4\pi}{15}\,b_1c_1\,(b_1^2 + c_1^2),\ \frac{dJ}{db_1} = \frac{4\pi}{15}\,a_1c_1\,(3b_1^2 + c_1^2),\ \frac{dJ}{dc_1} = \frac{4\pi}{15}\,b_1c_1\,(b_1^2 + 3c_1^2)\,.$$

Si nous ajoutons à l'ellipsoïde une couche infiniment mince d'épaisseur,

$$l\xi_3\,M_3N_3\,,$$

la figure reste ellipsoïdale, mais les trois axes subissent des accroissements

$$l^{(1)}\xi_3M_3^{(1)}N_3^{(1)},\ l^{(2)}\xi_3M_3^{(2)}N_3^{(2)},\ l^{(3)}\xi_3M_3^{(3)}N_3^{(3)}$$

où $l^{(i)}$, $M_3^{(i)}$, $N_3^{(i)}$ $(i = 1, 2, 3)$ sont les fonctions l, M_3, N_3, où on a fait respectivement :—

Pour $i = 1$	$\mu = b$	$\nu = c$	$\rho = \rho_0$
$i = 2$	$\mu = a$	$\nu = c$	$\rho = \rho_0$
$i = 3$	$\mu = a$	$\nu = b$	$\rho = \rho_0$

On voit alors que

$$B_3R_3^0\Omega_3 = \frac{dJ}{da_1}\,l^{(1)}M_3^{(1)}N_3^{(1)} + \frac{dJ}{db_1}\,l^{(2)}M_3^{(2)}N_3^{(2)} + \frac{dJ}{dc_1}\,l^{(3)}M_3^{(3)}N_3^{(3)}\,.$$

Dans les dérivées dJ/da_1, etc., on a fait bien entendu

$$a_1 = \sqrt{(\rho_0^2 - a^2)}, \quad b_1 = \sqrt{(\rho_0^2 - b^2)}, \quad c_1 = \sqrt{(\rho_0^2 - c^2)}.$$

On trouverait de même l'expression de $B_4 R_4^0 \Omega_4$.

Conditions de la Stabilité.

Soit U l'énergie de gravitation de la masse envisagée, J le moment d'inertie, ω la vitesse angulaire ; l'énergie totale sera :—

$$U + \tfrac{1}{2}\omega^2 J$$

Soit ω_0 la vitesse angulaire de l'ellipsoïde critique E_0 et posons :

$$W = U + \tfrac{1}{2}\omega_0^2 J$$

$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\epsilon$$

notre énergie totale sera

$$W + \epsilon J.$$

Nous avons trouvé plus haut le développement de W et celui de J jusqu'à l'approximation qui nous convient ; nous avons d'abord :

$$W = W_0 + \Sigma G_i \xi_i^2 + H_0 \xi_5^4 + \Sigma Q_i \xi_5 \xi_i.$$

Nous avons appris à calculer les coëfficients G_i, H_0, et Q_i ; nous remarquerons : (1) que les G_i ne sont autre chose que les coëfficients de stabilité ; (2) que G_5 est nul, et qu'il en est de même de Q_5 ainsi que de tous les coëfficients Q_i qui ne se rapportent pas à une fonction de LAMÉ paire et uniforme. Comme H_0 se compose de deux parties qui joueront un rôle assez différent, j'écrirai :

$$H_0 = H + H',$$

$$H = [\mathfrak{C}_1 + \tfrac{2}{21}\pi R''_5 S_5]\Gamma\Omega_5 + \left[\mathfrak{D}_1 + \tfrac{1}{21}\pi \frac{f}{\rho} R'_5 S_5 - \tfrac{1}{12}\pi \frac{f}{\rho}\right]\frac{d\Gamma}{d\rho}\Omega_5 + \mathfrak{E}_1 \frac{d^2\Gamma}{d\ \ ^2}\Omega_5$$

$$H' = -\tfrac{1}{2}\pi\Sigma \frac{\beta_i^2 R'_i S'_i}{2n+1}\Omega_i.$$

Nous avons d'autre part :

$$J = J_0 + \gamma_0 \xi_5^2 + \gamma_3 \xi_3 + \gamma_4 \xi_4$$

et nous avons appris plus haut à calculer les coëfficients γ.

On obtiendra les équations qui définissent la poire, en écrivant que les dérivées de l'énergie sont nulles ; on trouve ainsi :

1. Par la dérivée par rapport à ξ_5 :

$$2H_0\xi_5^2 + \epsilon\gamma_0 + \Sigma Q_i\xi_i = 0$$

2. Par la dérivée par rapport à ξ_3 :

$$2G_3\xi_3 + Q_3\xi_5^2 + \epsilon\gamma_3 = 0$$

3. Par la dérivée par rapport à ξ_4 :

$$2G_4\xi_4 + Q_4\xi_5^2 + \epsilon\gamma_4 = 0$$

4. Par la dérivée par rapport aux autres ξ_i :

$$2G_i\xi_i + Q_i\xi_5^2 = 0$$

Le rapprochement de ces diverses équations donne :

$$\xi_5^2\left[2H_0 - \Sigma\frac{Q_i^2}{2G_i}\right] + \epsilon\left(\gamma_0 - \frac{Q_3\gamma_3}{2G_3} - \frac{Q_4\gamma_4}{2G_4}\right) = 0.$$

La quantité dont il faut déterminer le signe, c'est :

$$\omega J - \omega_0 J_0 = \omega_0(J - J_0) + \frac{\epsilon}{\omega_0}J_0.$$

Or

$$J - J_0 = \xi_5^2\left(\gamma_0 - \frac{Q_3\gamma_3}{2G_3} - \frac{Q_4\gamma_4}{2G_4}\right) - \epsilon\left(\frac{\gamma_3^2}{2G_3} + \frac{\gamma_4^2}{2G_4}\right).$$

Posons alors

$$\gamma_0 - \frac{Q_3\gamma_3}{2G_3} - \frac{Q_4\gamma_4}{2G_4} = T$$

d'où

$$\frac{\epsilon}{\xi_5^2} = \frac{\Sigma\frac{Q_i^2}{2G_i} - 2H - 2H'}{T}.$$

On voit que la quantité dont il faut déterminer le signe sera :

$$\text{(A)}\qquad \frac{\omega J - \omega_0 J_0}{\omega_0\xi_5^2} = T + \frac{1}{T}\left(\frac{J_0}{\omega_0^2} - \frac{\gamma_3^2}{2G_3} - \frac{\gamma_4^2}{2G_4}\right)\left(\Sigma\frac{Q_i^2}{2G_i} - 2H - 2H'\right).$$

Il est aisé de vérifier que cette formule (A) est homogène ; voici ce que j'entends par là. Les fonctions de LAMÉ M_i ne sont définies qu'à un facteur constant près, et nos formules, pour avoir un sens, doivent être homogènes par rapport à chacun de ces facteurs constants arbitraires. L'intégrale

$$\Omega_i = \int lM_i^2N_i^2d\sigma$$

est évidemment proportionnelle à la quatrième puissance de ce facteur, puisque ce facteur entre également dans M_i et dans N_i.

Nous devons donc vérifier que la formule (A) est homogène par rapport à Ω_i, et en particulier par rapport à Ω_5. Pour écrire, par exemple, qu'une quantité (B) est proportionnelle à la α^e puissance de Ω_i et à la β^e puissance de Ω_5, j'écrirai :

$$B \propto \Omega_i^{\alpha}\,\Omega_5^{\beta}.$$

Je trouve ainsi :

$$\beta_i\Omega_i = \int l^3 M_5^2 N_5^2 M_i N_i d\sigma \propto \Omega_5\sqrt{\Omega_i}$$

d'où

$$\beta_i \propto \frac{d\beta_i}{d\rho} \propto \Omega_5\Omega_i^{-\frac{1}{2}}$$

De même :

$$\Gamma_i\Omega_i = \int l^5 M_5^3 N_5^3 M_i N_i d\sigma \propto \Omega_5^{\frac{3}{2}}\Omega_i^{\frac{1}{2}}$$

d'où

$$\Gamma_i \propto \Omega_5^{\frac{3}{2}}\Omega_i^{\frac{1}{2}}$$

et

$$\Gamma = \Gamma_5 \propto \frac{d\Gamma}{d\rho} \propto \frac{d^2\Gamma}{d\rho^2} \propto \Omega_5.$$

On trouve ensuite :

$$Q_i \propto \beta_i\Omega_i \propto \Omega_5\sqrt{\Omega_i}$$

$$H \propto \Gamma\Omega_5 \propto \Omega_5^2\,;\ \ H' \propto \beta_i^2\Omega_i \propto \Omega_5^2\,;\ \ G_i \propto \Omega_i$$

$$\Sigma\frac{Q_i^2}{G_i} \propto \Omega_5^2$$

et enfin

$$\Sigma\frac{Q_i^2}{G_i} - 2H - 2H' \propto \Omega_5^2\,.$$

Les coëfficients appelés plus haut B_i et C_i dans le calul de J sont proportionels à $\Omega_i^{-\frac{1}{2}}$, ce qui donne :

$$\gamma_0 \propto C_i\beta_i\Omega_i \propto \beta_i\sqrt{\Omega_i} \propto \Omega_5\,;$$

$$\gamma_3 \propto B_3\Omega_3 \propto \sqrt{\Omega_3}\,;\quad \gamma_4 \propto B_4\Omega_4 \propto \sqrt{\Omega_4}$$

$$\frac{Q_i\gamma_i}{G_i} \propto \frac{\beta_i\Omega_i\sqrt{\Omega_i}}{\Omega_i} \propto \sqrt{\Omega_i} \propto \Omega_5$$

et enfin

$$T \propto \Omega_5.$$

D'autre part :

$$\frac{J_0}{\omega_0^2} \propto \frac{\gamma_i^2}{G_i} \propto \frac{\Omega_i}{\Omega_i} \propto 1$$

et

$$\frac{J_0}{\omega_0^2} - \frac{\gamma_3^2}{2G_3} - \frac{\gamma_4^2}{2G_4} \propto 1$$

de sorte que finalement le second membre de notre formule (A) est homogène et de degré 1 par rapport à Ω_5 et ne contient pas les autres Ω_i.

Détermination des Intégrales.

Dans les coëfficients et les formules qui précèdent entrent diverses intégrales, et nous devons chercher à les calculer.

1. Les axes de l'ellipsoïde E_0 étant supposés connus, on formera aisément les diverses fonctions R_i, ce n'est qu'une affaire de calcul algébrique ; on a à résoudre diverses équations algébriques, et ces équations sont du second degré pour toutes les fonctions de LAMÉ d'ordre 0, 1, 2, 3, et pour quelques unes de celles d'ordre 4 et 5.

Les fonctions R_i étant formées, on aura immédiatement les valeurs R_i^0, qui correspondent à $\rho = \rho_0$ et aussi celles des dérivées successives R'_i, R''_i, etc.

2. Dans nos équations figurent les intégrales S_i ; or le calcul de ces intégrales se ramène à celui des intégrales définies :

$$\int_{\rho_0}^{\infty} d\rho \left(\frac{d\theta}{d\rho}\right) \frac{1}{R_i^2}.$$

Quelle est la forme de la fonction $\frac{1}{R_i^2}$, qui figure sous le signe $\int$? Nous allons l'exprimer en fonction de l'argument elliptique θ, et nous emploierons la notation $\wp$ et $\mathcal{6}$ de WEIERSTRASS. Soit

$$R_i = \Pi_i \Pi'_i$$

Π_i étant le produit de 0, 1, 2, ou 3 des facteurs $\sqrt{(\rho^2 - a^2)}$, $\sqrt{(\rho^2 - b^2)}$, $\sqrt{(\rho^2 - c^2)}$ et Π'_i un produit de facteurs de la forme $\rho^2 - \lambda_k^2$. Nous poserons :

$$\rho^2 - a^2 = \wp(\theta) - e_1 ; \quad \rho^2 - b^2 = \wp(\theta) - e_2 ; \quad \rho^2 - c^2 = \wp(\theta) - e_3 ;$$

$$e_1 + e_2 + e_3 = 0 ;$$

d'où

$$\rho^2 - \wp(\theta) = a^2 - e_1 = b^2 - e_2 = c^2 - e_3 = \tfrac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2).$$

Nous avons d'ailleurs comme on sait :

$$\wp(\omega_1) = e_1, \qquad \wp(\omega_2) = e_2, \qquad \wp(\omega_3) = e_3.$$

La valeur zéro de l'argument θ correspond à $\rho = \infty$, et nous appellerons θ_0 et E_k, les valeurs qui correspondent à $\rho = \rho_0$ ou à $\rho = \lambda_k$.

Considérons alors la fonction $1/R_i^2$ comme une fonction doublement périodique, et décomposons-la en éléments simples. Les éléments simples seront :—

1. Un terme constant.
2. Des termes en

$$\wp(\theta - \omega_1), \qquad \wp(\theta - \omega_2), \qquad \wp(\theta - \omega_3)$$

provenant des facteurs $\sqrt{(\rho^2 - a^2)}$, $\sqrt{(\rho^2 - b^2)}$, $\sqrt{(\rho^2 - c^2)}$, qui peuvent exister dans R_i.

3. Des termes en

$$\zeta(\theta + \epsilon_\kappa) - \zeta(\theta - \epsilon_\kappa), \qquad \wp(\theta - \epsilon_\kappa) + \wp(\theta + \epsilon_\kappa)$$

provenant des facteurs $\rho^2 - \lambda_k^2$.

Les coëfficients de ces divers termes, sauf le terme constant, peuvent se déterminer par un calcul purement algébrique.

Quant au terme constant, c'est une fonction linéaire non homogène des $\zeta(\epsilon_k)$, fonction linéaire dont les coëfficients peuvent se calculer algébriquement.

L'intégrale indéfinie contiendra donc des termes en

$$\theta, \quad \theta\zeta(\epsilon_\kappa), \quad \zeta(\theta - \omega_1), \quad \zeta(\theta - \omega_2), \quad \zeta(\theta - \omega_3), \quad \log\frac{\mathscr{O}(\theta + \epsilon_\kappa)}{\mathscr{O}(\theta - \epsilon_\kappa)},$$

$$\zeta(\theta - \epsilon_\kappa) + \zeta(\theta + \epsilon_\kappa)$$

ce qui donnera dans l'intégrale définie des termes en

$$\theta_0; \quad \theta_0\zeta(\epsilon_\kappa); \quad \zeta(\theta_0 - \omega_i) + \zeta(\omega_i) = \zeta(\theta_0 - \omega_i) + \eta_i;$$

$$\log\frac{\mathscr{O}(\theta_0 + \epsilon_\kappa)}{\mathscr{O}(\theta_0 - \epsilon_\kappa)}; \qquad \zeta(\theta_0 - \epsilon_\kappa) + \zeta(\theta_0 + \epsilon_\kappa).$$

Le calcul de S_i se ramène donc au calcul de ces diverses quantités. Connaissant S_i, on aura immédiatement S'_i et S''_i par les formules

$$R'_iS_i - R_iS'_i = 2n + 1; \qquad R''_iS_i - R_iS''_i = 0.$$

4. Nous avons ensuite les intégrales doubles :

$$\Omega_i = \int lM_i^2N_i^2d\sigma.$$

M_i^2 est un polynôme entier connu en $\wp(\theta_1)$; N_i^2 est le même polynôme en $\wp(\theta_2)$; nous avons d'ailleurs :

$$ld\sigma = d\theta_1 d\theta_2\sqrt{-1}\,(\nu^2 - \mu^2) = d\theta_1 d\theta^2\sqrt{-1}\,[\wp(\theta_2) - \wp(\theta_1)].$$

Quant aux limites d'intégration, elles sont données par les équations

$$a^2 > \mu^2 > b^2 > \nu^2 > c^2,$$

d'où

$$e_1 > \wp(\theta_1) > e_2 > \wp(\theta_2) > e_3$$

ce qui montre qu'il faut faire varier θ_1 depuis $\omega_1 - \omega_3$ jusqu'à $\omega_1 + \omega_3$ et θ_2 depuis $\omega_3 - \omega_1$ jusqu'à $\omega_3 + \omega_1$ le long des côtés convenables du rectangle des périodes.

Les limites étant constantes, l'intégrale double se ramène à une combinaison d'intégrales simples :

$$\Omega_i = \sqrt{-1}\,.\left[\int M_i^2 d\theta_1 \int N_i^2\wp(\theta_2)\,d\theta_2 - \int N_i^2 d\theta_2 \int M_i^2\wp(\theta_1)\,d\theta_1\right].$$

Ces intégrales simples se calculent d'une façon très simple. On peut par un calcul algébrique décomposer M_i^2 et $M_i^2\wp(\theta_1)$ en éléments simples, c'est-à-dire, en polynôme dont les termes sont des multiples de $\wp(\theta_1)$ et de ses dérivées. Parmi ces termes nous retiendrons seulement le terme constant et le terme en $\wp(\theta_1)$. Le premier donnera comme intégrales ω_1 et ω_3, le second η_1 et η_3 à un facteur numérique près.

Le calcul de Ω_i est ainsi ramené à celui des périodes ω et η.

5. Nous avons ensuite les intégrales

$$\Omega_i\beta_i = \int l^3 M_5^2 N_5^2 M_i N_i d\sigma = \sqrt{-1}\,.\int l^2 M_5^2 N_5^2 M_i N_i [\wp(\theta_2) - \wp(\theta_1)] d\theta_1 d\theta_2.$$

Ici encore $M_5^2\, M_i$ est un polynôme entier en $\wp(\theta_1)$ et $N_5^2\, N_i$ est le même polynôme en $\wp(\theta_2)$. On a d'ailleurs :

$$l^2 = \frac{1}{(\rho_0^2 - \mu^2)(\rho_0^2 - \nu^2)} = \frac{1}{[\wp(\theta_1) - \wp(\theta_0)]\,[\wp(\theta_2) - \wp(\theta_0)]}.$$

Notre intégrale double se ramène encore à une combinaison d'intégrales simples.

$$\Omega_i\beta_i = \sqrt{-1}\,.\left[\int \frac{M_5^2 M_i d\theta_1}{\wp(\theta_1) - \wp(\theta_0)} \int \frac{N_5^2 N_i \wp(\theta_2)\, d\theta_2}{\wp(\theta_2) - \wp(\theta_0)} - \int \frac{N_5^2 N_i d\theta_2}{\wp(\theta_2) - \wp(\theta_0)} \int \frac{M_5^2 M_i \wp(\theta_1)\, d\theta_1}{\wp(\theta_1) - \wp(\theta_0)}\right].$$

Le calcul se fait de la même manière. Chacune des fonctions sous le signe $\int$ doit être décomposée en éléments simples, ces éléments sont une constante ; $\wp(\theta_1)$ ou ses dérivées, et enfin :

$$\zeta(\theta_1 + \theta_0) - \zeta(\theta_1 - \theta_0) - 2\zeta(\theta_0) = \frac{\wp'(\theta_0)}{\wp(\theta_1) - \wp(\theta_0)}.$$

Les coëfficients de cette décomposition pouvant se calculer algébriquement, l'intégration introduira, outre les périodes ω et η, deux transcendantes nouvelles, qui seront

$$-4\zeta(\theta_0)\,\omega_3 + \log\frac{\sigma(\omega_1 - \omega_3 - \theta_0)\,\sigma(\omega_1 + \omega_3 + \theta_0)}{\sigma(\omega_1 + \omega_3 - \theta_0)\,\sigma(\omega_1 - \omega_3 + \theta_0)} = 4\eta_3\theta_0 - 4\omega_3\zeta(\theta_0)$$

$$-4\zeta(\theta_0)\,\omega_1 + \log\frac{\sigma(\omega_3 - \omega_1 - \theta_0)\,\sigma(\omega_3 + \omega_1 + \theta_0)}{\sigma(\omega_3 + \omega_1 - \theta_0)\,\sigma(\omega_3 - \omega_1 + \theta_0)} = 4\eta_1\theta_0 - 4\omega_1\zeta(\theta_0)$$

qui se ramènent d'ailleurs toutes deux à θ_0 et à $\zeta(\theta_0)$.

6. Nous avons ensuite l'intégrale

$$\Omega_i \frac{d\beta_i}{d\rho}$$

qui est la dérivée de la précédente par rapport à ρ. (Ici ρ est, bien entendu, pris égal à ρ_0.)

Elle dépend des dérivées par rapport à ρ des quatre intégrales simples qui figurent dans l'expression ci-dessus de $\Omega_i\beta_i$.

La dérivée de chacune de ces intégrales simples se calcule d'ailleurs aisément. Chacune de ces intégrales est une somme de produits où l'un des facteurs est

$$1, \ \omega_i, \ \eta_i, \ \text{ou} \ \eta_i\theta_0 - \omega_i\zeta(\theta_0)$$

et où l'autre facteur est un coëfficient calculable algébriquement.

La dérivée de ce coëfficient par rapport à ρ_0 sera ainsi calculable algébriquement, et quant à la dérivée du premier facteur elle sera :

$$0, \ 0, \ 0, \ \text{ou} \ \eta_i \frac{d\theta_0}{d\rho_0} - \omega_i \frac{d\zeta(\theta_0)}{d\rho_0} = \frac{\rho_0 \left[\eta_i - \omega_i \wp(\theta_0)\right]}{\sqrt{\{(\rho_0^2 - a^2)(\rho_0^2 - b^2)(\rho_0^2 - c^2)\}}}.$$

Il ne s'introduit donc aucune transcendante nouvelle.

7. Considérons maintenant l'intégrale :

$$\Omega_5\Gamma = \int l^5 M_5^4 N_5^4 d\sigma.$$

Nous aurons :

$$l^4 = \frac{1}{[\wp(\theta_1) - \wp(\theta_0)]^2 [\wp(\theta_2) - \wp(\theta_0)]^2}$$

d'où :

$$\Omega_5\Gamma = \sqrt{-1} \, . \left[\int \frac{M_5^4 d\theta_1}{[\wp(\theta_1) - \wp(\theta_0)]^2} \int \frac{N_5^4 d(\theta_2)\, d\theta_2}{[\wp(\theta_2) - \wp(\theta_0)]^2} - \int \frac{N_5^4 d\theta_2}{[\wp(\theta_2) - \wp(\theta_0)]^2} \int \frac{M_5^4 \wp(\theta_1)\, d\theta_1}{[\wp(\theta_1) - \wp(\theta_0)]^2} \right].$$

On opérerait toujours de la même manière en décomposant chaque fonction sous le signe $\int$ en éléments simples. Les éléments simples seront ici, outre une constante $\wp(\theta_1)$ et ses dérivées :

$$\zeta(\theta_1 + \theta_0) - \zeta(\theta_1 - \theta_0) - 2\zeta(\theta_0)$$

et

$$\wp(\theta_1 + \theta_0) + \wp(\theta_1 - \theta_0) - 2\wp(\theta_0).$$

L'intégration introduira donc les mêmes transcendantes que dans le cas de $\Omega_i\beta_i$ et en outre (par l'intégration du dernier élément simple que je viens de citer) :

$$4\eta_i - 4\omega_i\wp(\theta_0),$$

ce qui n'est pas une transcendante nouvelle.

7. Il ne nous reste plus que les intégrales

$$\Omega_5 \frac{d\Gamma}{d\rho}, \ \Omega_5 \frac{d^2\Gamma}{d\rho^2}$$

qui sont les dérivées de la précédente.

En raisonnant comme dans le cas de $d\beta_i/d\rho$, on verrait que ces intégrales n'introduisent pas de transcendante nouvelle.

Le calcul de ces transcendantes ne peut présenter de difficulté si l'on emploie les formules de Weierstrass réunies et mises sous une forme si commode par les soins de

M. SCHWARZ. On n'a qu'à employer des séries très convergentes procédant suivant les puissances de la quantité que JACOBI appelle q et WEIERSTRASS h. D'ailleurs dans le cas de l'ellipsoïde E_0, la valeur de q est si petite que l'on pourrait s'arrêter au premier terme. Ainsi dans le calcul de β_i, de Γ, de leurs dérivées et de Ω_i, on ne rencontrera aucun obstacle; car il ne s'introduit qu'un petit nombre de transcendantes :

$$\omega_1, \omega_3, \eta_1, \eta_3, \zeta(\theta_0), \theta_0.$$

Le calcul ne serait pas tout à fait aussi facile pour S_i de sorte que dans ce cas, on pourrait recourir avec avantage aux développements donnés par M. DARWIN à la fin de son mémoire "Ellipsoidal Harmonic Analysis," et qui procèdent suivant la quantité qu'il appelle β.

Si les axes de l'ellipsoïde jacobien critique sont comme l'a calculé M. DARWIN dans son second mémoire

$$0{\cdot}65066\,;\ 0{\cdot}81498\,;\ 1{\cdot}88583$$

on trouve, sauf erreur de calcul de ma part :

$$h_1 = e^{-\frac{\omega_1 \pi i}{\omega_3}} = \tfrac{1}{200}.$$

$$\omega_1 = 0{\cdot}53790\,; \qquad \omega_3 = i \times 0{\cdot}90528\,;$$
$$\eta_1 = 1{\cdot}1956\,; \qquad \eta_3 = -i \times 0{\cdot}9080\,;$$
$$\theta_0 = 0{\cdot}27501\,;$$
$$\zeta(\theta_0) = 0{\cdot}71640.$$

Nouvelle Expression des Conditions de Stabilité.

La détermination de *chacune* des intégrales ne présente donc aucune difficulté, et le calcul serait en somme facile si ces intégrales n'étaient en nombre infini.

Rappelons le résultat obtenu plus haut. *La poire sera stable ou instable, suivant que l'expression*

$$T + \frac{1}{T}\left(\frac{J_0}{\omega_0^2} - \frac{\gamma_3^2}{2G_3} - \frac{\gamma_4^2}{2G_4}\right)\left(\Sigma \frac{Q_i^2}{2G_i} - 2H - 2H'\right)$$

sera positive ou négative.

Or nous pouvons tout de suite remarquer que parmi les quantités qui figurent dans cette expression

$$T, J_0, \omega_0^2, \gamma_3, \gamma_4, G_3, G_4, H$$

ne dépendent que d'un nombre fini d'intégrales, tandis que

$$\Sigma \frac{Q_i^2}{2G_i} \quad \text{et} \quad H' = \tfrac{1}{2}\pi \Sigma \frac{\beta_i^2 R'_i S'_i}{2n+1}\Omega_i$$

dépendent d'une infinité d'intégrales. Toute la difficulté provient donc du calcul de la quantité

$$Z = \Sigma \frac{Q_i^2}{2G_i} - 2H'.$$

Heureusement il ne s'agit pas de calculer la valeur exacte de cette quantité, mais de reconnaître si elle satisfait à une certaine inégalité. Pour étudier cette inégalité, il faut que nous mettions en évidence le signe de plusieurs de nos quantités.

Commençons par les coëfficients de stabilité G_i. Si nous suivons la série des ellipsoïdes de MacLaurin, tous ces coëfficients sont d'abord négatifs. Le coëfficient G_3 changera de signe, tous les autres restant négatifs, quand nous arriverons à l'ellipsoïde de bifurcation, qui est en même temps un ellipsoïde de MacLaurin et un ellipsoïde de Jacobi. Mais à partir de cet ellipsoïde de bifurcation, on abandonne la série des ellipsoïdes de MacLaurin pour suivre celle des Jacobiens.

Pour cette série le coëfficient G_3 est également négatif, en vertu du principe de l'échange des stabilités convenablement interprété. Pour les premiers Jacobiens jusqu'au Jacobien critique, tous les coëfficients G_i seront donc négatifs sauf G_3. Pour le Jacobien critique, tous les G_i sont negatifs sauf G_5, qui est nul, et G_3, qui est positif.

Déterminons ensuite le signe de

$$Y = \frac{J_0}{\omega_0^2} - \frac{\gamma_3^2}{2G_3} - \frac{\gamma_4^2}{2G_4}.$$

Je renverrai à mon mémoire du Tome 7 des 'Acta,' et au paragraphe intitulé Stabilité des Ellipsoïdes. J'ai expliqué dans ce paragraphe que tous les Jacobiens sont stables si l'on assujettit (à titre de liaison) la figure de la masse fluide à rester ellipsoïdale, c'est-à-dire si l'on assujettit tous les ξ_i à êtres nuls sauf ξ_3 et ξ_4.

J'ai exposé en même temps la condition de la stabilité, qui avec notre notation actuelle s'écrit

$$W - W_0 - \frac{\omega_0^2}{2J}(J - J_0)^2 < 0,$$

ou comme il s'agit de petites déformations

$$W - W_0 - \frac{\omega_0^2}{2J_0}(J - J_0)^2 < 0.$$

En supposant tous les ξ_i nuls sauf ξ_3 et ξ_4, et remplaçant $W - W_0$ et $J - J_0$ par leurs valeurs, nous trouvons

$$G_3\xi_3^2 + G_4\xi_4^2 - \frac{\omega_0^2}{2J_0}(\gamma_3\xi_3 + \gamma_4\xi_4)^2 < 0,$$

ce qui entraîne l'inégalité

$$\left(G_3 - \frac{\omega_0^2}{2J_0}\gamma_3^2\right)\left(G_4 - \frac{\omega_0^2}{2J_0}\gamma_4^2\right) > \frac{\omega_0^4}{4J_0^2}\gamma_3^2\gamma_4^2.$$

Comme ω_0^2, J_0, et G_3 sont positifs et G_4 négatif, l'inégalité change de sens quand on la divise par $\frac{\omega_0^4}{J_0^2}\, G_3\, G_4$, ce qui donne

$$\left(\frac{J_0}{\omega_0^2} - \frac{\gamma_3^2}{2G_3}\right)\left(\frac{J_0}{\omega_0^2} - \frac{\gamma_4^2}{2G_4}\right) < \frac{\gamma_3^2\gamma_4^2}{4G_3G_4}$$

ou

$$\frac{J_0}{\omega_0^2}\left(\frac{J_0}{\omega_0^2} - \frac{\gamma_3^2}{2G_3} - \frac{\gamma_4^2}{2G_4}\right) < 0$$

ou enfin

$$Y < 0.$$

Passons à la détermination de signe de T. Pour cela nous allons envisager le coëfficient G_5 pour un ellipsoïde de JACOBI très peu différent du Jacobien critique.

Soit E'_0 cet ellipsoïde, et $\frac{1}{2}\omega_0^2 + \epsilon$ la valeur de $\frac{1}{2}\omega^2$ correspondante. Nous pourrons considérer ϵ comme définissant l'ellipsoïde E'_0; nous supposons ϵ très petit.

Soit ensuite S une surface peu différente de E_0 et de E_0'. Soit $d\sigma'$ un élément de la surface de E'_0, et l' la quantité qui joue par rapport à E'_0 et à $d\sigma'$ le même rôle que l par rapport à E_0 et à $d\sigma$. Par les différents points de $d\sigma'$ je mène des courbes normales aux ellipsoïdes homofocaux à E'_0, et je les prolonge jusqu'à leur rencontre avec S. Soit dv' le petit volume ainsi formé. Je supposerai que la surface S ait été définie de telle sorte que l'on ait

$$dv'/d\sigma' = \eta l' M_5^* N_5^*\,;$$

η étant un coëfficient constant très petit, M_5^* et N_5^* les fonctions qui jouent par rapport à E'_0 le même rôle que M_5 et N_5 par rapport à E_0.

Soit maintenant $d\sigma$ un élément de E_0, par $d\sigma$ menons des courbes $\mu =$ const. $\nu =$ const. prolongées jusqu'à S, et soit $d\sigma$ le petit volume ainsi engendré. Nous poserons

$$dv/d\sigma = l \Sigma \xi_i M_i N_i$$

de sorte que les coëfficients ξ_i pourront servir à définir la forme de S. Il est clair que les ξ_i sont des fonctions de ϵ et de η, développables suivant les puissances de ϵ et de η.

Pour $\epsilon = 0$, l'ellipsoïde E'_1 se réduit à E_0, et tous les ξ_i s'annullent à l'exception de ξ_5, qui se réduit à η.

Pour $\eta = 0$, la surface S se réduit à E_0'; alors ξ_3 et ξ_4 sont des quantités du premier ordre, ϵ étant regardé comme de premier ordre, tandis que les autres ξ_i seront du deuxième ordre.

Si donc ϵ et η sont regardées comme des quantités du premier ordre, ξ_i (en excluant les valeurs $i = 3,\ 4,\ 5$) sera du deuxième ordre, parce que tous ses termes contiendront en facteur soit ϵ^2, soit $\epsilon\eta$; ξ_3 et ξ_4 se réduiront à $\frac{d\xi_3}{d\epsilon}\epsilon$ et à $\frac{d\xi_4}{d\epsilon}\epsilon$ à des quantités près du deuxième ordre ; ξ_5 se réduira à η à des quantités près du deuxième ordre.

Nous devons calculer $W + \epsilon J$.

Dans ce qui va suivre, nous négligerons les quantités du quatrième ordre et en plus ϵ^3 et $\epsilon^2\eta$. Dans ces conditions nous pouvons négliger d'abord tous les monômes du quatrième ordre par rapport aux ξ, et arrêter le développement de W suivant les puissances des ξ au troisième ordre inclusivement. Nous pouvons également négliger les monômes du troisième ordre multipliés par ϵ, et par conséquent arrêter le développement de ϵJ suivant les puissances des ξ au deuxième ordre inclusivement.

Nous négligerons en outre : les ξ_i^2 $(i \neq 3, 4, 5)$ qui sont du quatrième ordre ; les monômes du troisième ordre en ξ_3 et ξ_4 qui sont au quatrième ordre près égaux à un multiple de ϵ^3 ; les termes en $\xi_i\ \xi_k\ \xi_j$ $(i \neq 3,\ 4,\ 5\ ;\ k,\ j = 3,\ 4,\ 5)$, qui sont du quatrième ordre ; les termes en $\epsilon\xi_i$ $(i \neq 3, 4, 5)$, qui pourraient figurer dans ϵJ, parce qu'ils contiennent ϵ^2 en facteur et par conséquent sont, au quatrième ordre près, égaux à un multiple de ϵ^3 plus un multiple de $\epsilon^2\eta$.

Dans ces conditions nous devons conserver les termes suivants :

dans W : $$W = W_0 + G_3\xi_3^2 + G_4\xi_4^2 + Q_3\xi_5^2\xi_3 + Q_4\xi_5^2\xi_4,$$

dans ϵJ : $$\epsilon J = \epsilon J_0 + \epsilon\gamma_0\xi_5^2 + \epsilon\gamma_3\xi_3 + \epsilon\gamma_4\xi_4,$$

d'où :

$$W + \epsilon J = (W_0 + \epsilon J_0) + G_3\xi_3^2 + G_4\xi_4^2 + Q_3\xi_5^2\xi_3 + Q_4\xi_5^2\xi_4 + \epsilon\gamma_0\xi_5^2 + \epsilon\gamma_3\xi_3 + \epsilon\gamma_4\xi_4.$$

Pour $\eta = 0$, cette expression se réduit à

$$W_0' = (W_0 + \epsilon J_0) + G_3\xi_3^2 + G_4\xi_4^2 + \epsilon\gamma_3\xi_3 + \epsilon\gamma_4\xi_4,$$

et ses dérivées doivent s'annuler, puisque le Jacobien est une figure d'équilibre. On aura donc :

$$2G_3\xi_3 + \epsilon\gamma_3 = 2G_4\xi_4 + \epsilon\gamma_4 = 0$$

d'où, à des quantités près de l'ordre de ϵ^2, ou de $\epsilon\eta$,

$$\xi_3 = -\frac{\gamma_3}{2G_3}\epsilon, \qquad \xi_4 = -\frac{\gamma_4}{2G_4}\epsilon.$$

Comme ξ_5 se réduit à η, pour $\epsilon = 0$, on aura

$$W + \epsilon J = (W_0 + \epsilon J_0) + \frac{\epsilon^2}{4}\left(\frac{\gamma_3^2}{G_3} + \frac{\gamma_4^2}{G_4}\right) + \epsilon\eta^2\left(\gamma_0 - \frac{Q_3\gamma_3}{2G_3} - \frac{Q_4\gamma_4}{2G_4}\right)$$

en négligeant ϵ^3, $\epsilon^2\eta$, $\epsilon\eta^3$, η^4. En faisant $\eta = 0$ il vient

$$W_0' = (W_0 + \epsilon J_0) - \frac{\epsilon^2}{4}\left(\frac{\gamma_3^2}{G_3} + \frac{\gamma_4^2}{G_4}\right).$$

D'autre part, comme η joue par rapport à E'_1 le même rôle que ξ_5 par rapport à E_0, on aura avec la même approximation

$$W + \epsilon J = W'_0 + G_5'\eta^2,$$

G'_5 étant le coëfficient de stabilité relatif à l'ellipsoïde E'_0 et au "third zonal harmonic."

On aura donc :

$$G_5' = \epsilon\left(\gamma_0 - \frac{Q_3\gamma_3}{2G_3} - \frac{Q_4\gamma_4}{2G_4}\right) = \epsilon T.$$

Si nous supposons que E'_0 est plus allongé que E_0, ϵ sera négatif, puisque les vitesses de rotation vont en diminuant dans la série des Jacobiens. D'ailleurs G'_5 sera positif, puisque le coëfficient de stabilité a passé du négatif au positif quand on a franchi l'ellipsoïde critique. Donc

$$T < 0.$$

Revenons aux conditions de stabilité de la poire.

Posons

$$X = 2H + 2H' - \Sigma\frac{Q_i^2}{2G_i},$$

$$Y = \frac{J_0}{\omega_0^2} - \frac{\gamma_3^2}{2G_3} - \frac{\gamma_4^2}{2G_4}.$$

Nous avons trouvé

$$\xi_5^2 X + \epsilon T = 0,$$

ϵ se rapportant à la poire et non plus à E'_0.

$$\frac{\omega J - \omega_0 J_0}{\omega_0 \xi_5^2} = T - \frac{XY}{T} \qquad Y < 0, \quad T < 0.$$

Pour la stabilité, il suffit que ω soit maximum, c'est-à-dire que ϵ soit négatif; il faut et il suffit que ωJ soit minimum, c'est-à-dire que

$$\omega J - \omega_0 J_0 > 0.$$

Or $\epsilon < 0$, équivaut, puisque T est négatif, à

$$X < 0,$$

C'est donc là une condition *suffisante* de la stabilité.

Supposons maintenant $X > 0$; alors T sera négatif, XY/T positif, et $\omega J - \omega_0 J_0$ négatif ; il y aura donc instabilité.

En résumé la condition nécessaire et suffisante pour la stabilité, c'est que

$$X < 0,$$

ou

$$2H + 2H' - \Sigma \frac{Q_i^2}{2G_i} < 0\,,$$

ou

$$2H - \frac{\pi}{2} \Sigma \frac{\beta_i^2 R'_i S''_i}{2n+1} \Omega_i - \Sigma \frac{Q_i^2}{2G_i} < 0.$$

Si nous observons que R'_i est positif, S''_i négatif, les G_i negatifs sauf G_3, nous verrons que tous les termes du premier membre sont positifs sauf

$$2H \quad \text{et} \quad -Q_3^2/2G_3.$$

Si donc il y a instabilité, c'est-à-dire si l'inégalité précédente n'a pas lieu, il suffira pour le constater de calculer un nombre fini de termes du premier membre. Si au contraire il y a stabilité, on ne pourra s'en assurer qu'en calculant la somme des termes positifs du premier membre qui sont en nombre infini, ou en évaluant une limite supérieure de cette somme.