SUR L'ÉQUILIBRE D'UNE MASSE FLUIDE

ANIMÉE D'UN MOUVEMENT DE ROTATION

PAR

H. POINCARÉ

À PARIS.

§ 1. *Introduction.*

Quelles sont les figures d'équilibre relatif que peut affecter une masse fluide homogène dont toutes les molécules s'attirent conformément à la loi de NEWTON et qui est animée autour d'un certain axe d'un mouvement de rotation uniforme?

Quelles sont les conditions de stabilité de cet équilibre?

Tels sont les deux problèmes qui forment l'objet de ce mémoire.

On en connaît depuis longtemps deux solutions: l'ellipsoïde de révolution et l'ellipsoïde à trois axes inégaux de JACOBI. Je me propose d'établir qu'il y en a une infinité d'autres.

Mais je vais avant d'aller plus loin signaler un certain nombre de résultats que l'on trouve dans le *Treatise on Natural Philosophy* de MM. TAIT et THOMSON, 2^me^ édition, 778. Sir WILLIAM THOMSON énonce la plupart de ces propositions sans aucune démonstration; pour quelques unes d'entre elles, il renvoie à des mémoires plus étendus insérés aux Philosophical Transactions.

Voici ces résultats, qui doivent nous servir de point de départ.

(a). L'ellipsoïde de révolution aplati est une figure d'équilibre toujours stable, si on impose à la masse fluide la condition d'affecter la forme d'un ellipsoïde de révolution.

(b). Si nous imposons à notre masse la condition d'être de révolution, mais non plus celle d'être ellipsoïdale, on trouve, si le moment de la quantité de mouvement est assez grand, deux figures d'équilibre: une figure annulaire qui est stable et une figure ellipsoïdale qui est instable. (Nous verrons dans la suite de ce mémoire qu'il y en a une infinité d'autres parmi lesquelles il y en a de stables grâce à la condition imposée à la masse de rester de révolution.)

(c). Il existe également des figures d'équilibre, probablement instables, où la masse se subdivise en plusieurs anneaux concentriques.

(d). La figure annulaire d'équilibre est stable si l'on impose à la masse la condition de rester de révolution, et probablement instable si l'on supprime cette liaison.

(e). Si l'on impose à la masse la condition d'être ellipsoïdale, mais non d'être de révolution, l'ellipsoïde de révolution est stable, si l'excentricité est inférieure à 0,8127 et instable dans le cas contraire. (Nous verrons dans la suite de ce mémoire que les conditions de stabilité restent les mêmes si l'on ne s'impose aucune liaison.)

L'ellipsoïde de JACOBI est toujours stable, si l'on impose à la masse la condition d'être ellipsoïdale.

(f et g). L'ellipsoïde de JACOBI, si l'on ne s'impose aucune condition est certainement instable dans certains cas, bien qu'il soit probablement stable dans d'autres. (Nous démontrerons dans la suite de ce mémoire qu'il y a effectivement des ellipsoïdes de JACOBI qui sont stables.)

Une autre forme d'équilibre stable, si le moment de la quantité de mouvement est assez grand, sera celle où la masse se subdivise en deux corps isolés, comparables à une planète et un satellite dont les vitesses de rotation seraient égales entre elles et à celles de révolution.

(h). Il existe également des configurations où le fluide se subdivise en plus de deux masses détachées, mais elles sont instables.

(i). Il subsiste une importante lacune entre le plus grand moment de la quantité de mouvement qui correspond à un ellipsoïde de JACOBI stable et le plus petit moment qui correspond à l'équilibre stable de deux masses isolées. Il y aurait intérêt à combler cette lacune par des figures intermédiaires. (J'ai fait à la fin de ce mémoire une tentative dans ce sens, mais je n'ai réussi pour ainsi dire qu'à amorcer le problème et à indiquer la voie à suivre.)

(j). Si l'énergie avec un moment donné est un minimum ou un maximum, l'équilibre est stable, pourvu que le liquide soit parfaitement dépourvu de viscosité. Il est probable qu'il est instable si l'énergie est un »minimax» mais cela n'a pas encore été démontré. (Nous verrons dans la suite de ce mémoire un exemple où l'équilibre est stable à la condition que la fluide soit *absolument* dépourvu de viscosité et bien que l'énergie soit un »minimax».)

(k). Si le liquide est visqueux, et si peu qu'il le soit, l'équilibre sera certainement instable si l'énergie est un maximum ou un minimax, et certainement stable si elle est un minimum.

Je donnerai dans la suite de ce travail la démonstration de quelques unes des propositions que sir WILLIAM THOMSON avait seulement énoncées, et je les compléterai même sur divers points, comme je l'ai déjà indiqué dans les parenthèses que j'ai intercalées dans le précédent exposé.

Je démontrerai aussi l'existence de figures d'équilibre tout à fait différentes de celles dont parlent MM. TAIT et THOMSON.

J'ai déjà donne dans le Bulletin Astronomique une courte note où j'étudie plus en détail l'anneau simple ou multiple dont il est question dans le passage cité plus haut [(b), (c) et (d)].

Dans cette étude, je me suis rencontré avec M[me] KOWALEVSKI qui avait déjà employé les mêmes procédés d'analyse dans un mémoire sur l'anneau de Saturne, qui avait été communiqué en 1874 à l'Université de Göttingen et qui n'a été imprimé qu'en 1885 dans les Astronomische Nachrichten.

§ 2. *Equilibre de bifurcation.*

Considérons d'abord le cas où il s'agit d'un équilibre absolu et d'un système dont la position est définie par n quantités $x_1, x_2, \dots, x_n$. Supposons qu'il y ait une fonction des forces $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ de façon que l'équilibre ait lieu quand toutes les dérivées de cette fonction s'annulent et qu'il soit stable quand cette fonction est maximum. Je supposerai qu'outre les quantités $x_1, x_2, \dots, x_n$, il entre dans la fonction F un paramètre variable y, de telle sorte que les valeurs des x qui correspondent à l'équilibre dépendent de ce paramètre y.

Supposons que y ait une valeur déterminée; les équations d'équilibre:

$$\frac{dF}{dx_1} = \frac{dF}{dx_2} = \dots = \frac{dF}{dx_n} = 0 \tag{1}$$

auront un certain nombre de racines; quand on fera varier y, (si F est une fonction holomorphe des x et de y, ce que nous supposerons d'abord) ces racines varieront d'une manière continue. Nous aurons ainsi un certain nombre de séries linéaires de racines:

$$\begin{array}{l}
x_1 = \varphi_{11}(y),\ x_2 = \varphi_{12}(y),\ \dots,\ x_n = \varphi_{1n}(y) \\
x_1 = \varphi_{21}(y),\ x_2 = \varphi_{22}(y),\ \dots,\ x_n = \varphi_{2n}(y) \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
x_1 = \varphi_{k1}(y),\ x_2 = \varphi_{k2}(y),\ \dots,\ x_n = \varphi_{kn}(y).
\end{array}$$

Dans chacune de ces séries linéaires, $x_1, x_2, \dots, x_n$ sont des fonctions continues du paramètre y. Pour certaines valeurs de y, deux ou plusieurs racines peuvent se confondre. Quelle est la condition pour qu'il en soit ainsi?

Soit Δ le déterminant fonctionnel des n dérivées $\frac{dF}{dx_1}, \frac{dF}{dx_2}, \dots, \frac{dF}{dx_n}$ par rapport aux n variables $x_1, x_2, \dots, x_n$, ou, en d'autres termes, le hessien de la fonction F par rapport à ces n variables. La condition nécessaire et suffisante pour que deux ou plusieurs racines se confondent, c'est que Δ soit nul.

Supposons que pour une certaine valeur α de y, pour laquelle Δ s'annule, p racines des équations (1) viennent à se confondre, ou en d'autres termes, qu'une même racine appartienne à la fois à p séries linéaires. Parmi les p racines qui appartiennent à ces p séries linéaires, il y en aura $2q$ qui seront imaginaires et $p - 2q$ qui seront réelles pour $y < \alpha$; il y en aura d'autre part $2r$ qui seront imaginaires et $p - 2r$ qui seront réelles pour $y > \alpha$.

Si $p = 2$, $q = r = 0$, les racines des deux séries linéaires sont réelles, et on a ainsi une racine qui appartient à la fois à deux séries réelles.

Si $p = 2$, $q = 0$, $r = 1$, les racines sont toutes deux réelles pour $y < \alpha$, et toutes deux imaginaires pour $y > \alpha$. Quand y en croissant atteint et dépasse la valeur α, deux racines réelles se confondent, puis deviennent imaginaires.

Si $p = 3$, $q = r = 1$, il y a pour $y < \alpha$ et pour $y > \alpha$, une racine réelle et deux imaginaires, de sorte que la racine qui correspond à $y = \alpha$ n'appartient qu'à une seule série réelle. Mais il est aisé de voir dans ce cas que Δ s'annule sans changer de signe.

Il est inutile de citer d'autres cas particuliers, j'arrive tout de suite au résultat général que j'ai en vue. Soit:

$$x_1 = \varphi_1(y),\ x_2 = \varphi_2(y),\ \ldots,\ x_n = \varphi_n(y) \tag{2}$$

une série linéaire de racines; $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ étant des fonctions continues et uniformes de y. Supposons de plus que pour les valeurs voisines de α, qu'elles soient inférieures ou supérieures à cette quantité, les fonctions $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ restent réelles. Si l'on substitue dans

$$\Delta(x_1, x_2, \ldots, x_n; y)$$

$\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ à la place de $x_1, x_2, \ldots, x_n$, cette fonction Δ ne dépendra plus que de y. Je suppose que pour $y = \alpha$, la fonction $\Delta(y)$ change de signe. Je dis alors que la racine

$$\varphi_1(\alpha),\ \varphi_2(\alpha),\ \ldots,\ \varphi_n(\alpha)$$

appartiendra non seulement à la série (2) mais à une autre série linéaire de racines réelles.

Avant de démontrer ce résultat général, donnons quelques exemples. Soit:

$$F = Ax_1^2 + \frac{1}{3}x_2^3 - y^2x_2 - \alpha y x_2.$$

Il vient pour les équations d'équilibre:

$$x_1 = 0, \qquad x_2 = \pm\sqrt{y^2 + \alpha y}$$

d'où

$$\Delta = 4Ax_2 = \pm 4A\sqrt{y^2 + \alpha y}.$$

Pour les valeurs de y comprises entre 0 et $-\alpha$ les valeurs de x_2 sont imaginaires; elles sont réelles pour les autres valeurs de y. Pour $y = 0$, et pour $y = -\alpha$, les racines passent du réel à l'imaginaire ou réciproquement; c'est aussi pour ces mêmes valeurs que Δ s'annule.

Faisons, en particulier: $\alpha = 0$; il y aura deux séries linéaires de positions d'équilibre:

$$x_1 = 0, \qquad x_2 = y \tag{2}$$

et

$$x_1 = 0, \qquad x_2 = -y. \tag{3}$$

Considérons la première de ces séries; pour chacune des positions qui lui appartiennent on aura

$$\Delta = 4Ay.$$

Quand y variera depuis $-\infty$ jusqu'à $+\infty$, les valeurs de x_1 et de x_2 resteront réelles, mais quand y passera par 0, Δ changera de signe. Donc en vertu du principe que je viens d'énoncer, la position d'équilibre qui correspond à la valeur $y = 0$, c'est à dire:

$$x_1 = 0, \qquad x_2 = 0$$

appartiendra non seulement à la série (2), mais encore à une autre série linéaire de positions d'équilibre. Il est aisé en effet de constater qu'elle appartient également à la série (3).

Soit maintenant:

$$F = Ax_1^2 + \frac{x_2^4}{4} - y^3 x_2.$$

Les équations d'équilibre deviennent

$$x_1 = 0, \qquad x_2^3 = y^3.$$

Il n'y a qu'une série de positions d'équilibre *réelles*, à savoir:

$$x_1 = 0, \qquad x_2 = y$$

et on voit que ces positions restent réelles quand y varie de $-\infty$ à $+\infty$. Aucune de ces positions ne peut donc appartenir à plusieurs séries de positions d'équilibre réelles comme cela avait lieu tout à l'heure. Cependant

$$\Delta = 6Ay^2$$

s'annule pour $y = 0$, *mais sans changer de signe.*

Pour démontrer ce principe que je viens d'énoncer et d'illustrer par quelques exemples, je supposerai que $n = 1$, de telle façon que je n'aie plus que deux variables: x qui définit la position du système et le paramètre y. On aura:

$$\Delta = \frac{d^2F}{dx^2}$$

et l'équation d'équilibre sera:

$$\frac{dF}{dx} = F'(x, y) = 0.$$

L'équation $F'(x, y) = 0$ pourra être considérée comme représentant une courbe plane C. Soit:

$$x = \varphi(y)$$

une fonction uniforme, réelle, finie et continue de y qui satisfasse à l'équation:

$$F'[\varphi(y), y] = 0.$$

L'équation $x = \varphi(y)$ représentera alors une des branches B de la courbe C. Soit $M(x = \alpha, y = \beta)$ un des points de cette branche de courbe. Supposons que lorsqu'on suit cette branche de courbe, on voie Δ changer de signe au moment où on franchit le point M. Je dis qu'il passera par le point M une autre branche de la courbe C.

Soit en effet P le point de la branche B qui a pour ordonnée $y = \beta - \varepsilon$ et Q le point qui a pour ordonnée $y = \beta + \varepsilon$ (ε étant très petit). Ces deux points sont réels, puisque par hypothèse $\varphi(y)$ est une fonction réelle de y. Je suppose par exemple qu'au point P, $\frac{d^2F}{dx^2} = \Delta$ soit positif, et négatif au point Q.

Par les points P et Q, je mène des parallèles à l'axe des x et je prends sur ces parallèles deux points P' et Q' à gauche de P et de Q. Au point P, $\frac{dF}{dx}$ est nul et $\frac{d^2F}{dx^2}$ positif; donc si le point P' est assez voisin de P, la dérivée première $\frac{dF}{dx}$ y sera négative. On verra de la même façon que si le point Q' est assez voisin de Q, $\frac{dF}{dx}$ y sera positive. Allons du point P' au point Q' en suivant une courbe qui s'éloigne très peu de la branche B, mais qui ne coupe pas cette branche; cela est toujours possible. Nous verrons $\frac{dF}{dx}$ changer de signe; il faut donc qu'à un certain moment $\frac{dF}{dx}$ s'annule et par conséquent que nous traversions une branche de la courbe C. Il y a donc une seconde branche de cette courbe qui vient passer par le point M.

En d'autres termes, ce point M est au moins un point double de la courbe C; je puis même affirmer que c'est un point multiple d'ordre pair.

Il est à remarquer que dans la démonstration précédente, nous n'avons pas été obligés de supposer que la fonction F est holomorphe, mais seulement qu'elle est finie et continue ainsi que ses dérivées des deux premiers ordres.

Il y a un cas particulier sur lequel il est nécessaire d'attirer l'attention. Soit

$$F = yx^2, \qquad \frac{dF}{dx} = 2xy, \qquad \Delta = 2y.$$

Nous avons une première série de positions d'équilibre réelles qui nous sont données par l'équation $x = 0$. Comme Δ s'annule avec y, il doit passer par le point $x = y = 0$ une seconde branche de la courbe C et en se reportant à la valeur de $\frac{dF}{dx}$, on voit que cette seconde branche n'est autre chose que la droite

$$y = 0.$$

Cette droite ne représente pas une série linéaire de positions d'équilibre analogue à celles que nous avons rencontrées jusqu'ici. C'est une série de positions d'équilibre indifférent; car si y s'annule, l'équilibre subsiste quel que soit x.

Supposons maintenant que la fonction F ne contenant toujours qu'une seule variable x, dépende non plus d'un seul paramètre y, mais de deux paramètres y_1 et y_2. Nous pourrons regarder x, y_1 et y_2 comme les coordonnées d'un point dans l'espace; alors l'équation

$$\frac{dF}{dx} = 0$$

représentera une surface S dont chacun des points correspondra à une position d'équilibre.

L'équation

$$\Delta = \frac{d^2F}{dx^2} = 0$$

représentera une seconde surface S'. Supposons que l'on considère une nappe N de la surface S représentée par une équation

$$x = \varphi(y_1, y_2)$$

où φ est une fonction finie, continue et *réelle* de y_1 et de y_2. Supposons que cette nappe soit coupée par la surface S' et de telle sorte que Δ change de signe quand on traverse la surface S' en suivant la nappe N. Alors la courbe d'intersection de N et de S' est une courbe double (ou multiple d'ordre supérieur, mais pair) de la surface S, par laquelle vient passer une autre nappe N' de cette surface S.

Il suffit en effet pour être ramené au cas d'un seul paramètre, de supposer entre y_1 et y_2 une relation linéaire

$$y_1 = ay_2 + b$$

ou en d'autres termes, de couper les surfaces S et S' par un plan quelconque parallèle à l'axe des x.

On arriverait évidemment à un résultat analogue dans le cas où l'on aurait p paramètres $y_1, y_2, \ldots, y_p$.

Supposons maintenant $n = 2$; de telle façon que nous ayons deux variables x_1 et x_2 définissant la position du système et un seul paramètre y. Je regarderai alors x_1, x_2 et y comme les coordonnées d'un point dans l'espace. Les équations d'équilibre:

$$\frac{dF}{dx_1} = 0, \qquad \frac{dF}{dx_2} = 0$$

représenteront alors deux surfaces S_1 et S_2 dont l'intersection sera une courbe gauche C. Soient

$$(4) \qquad x_1 = \varphi_1(y), \qquad x_2 = \varphi_2(y)$$

deux fonctions finies, continues et réelles de y et supposons que ces équations (4) représentent une branche B de la courbe C. Soit M un point de cette branche B; supposons que si l'on suit la branche B dans le sens des y croissants, on voie Δ changer de signe au moment où on franchit le point M. Soient P et Q deux points de B ayant pour ordonnées $y = \beta - \varepsilon$, $y = \beta + \varepsilon$; (l'ordonnée du point M étant $y = \beta$). Au point P, Δ sera par exemple positif, et négatif au point Q.

S'il en est ainsi, je dis qu'il passera par le point M une seconde branche de la courbe C.

En effet par les divers points de l'arc de courbe PQ faisons passer des plans parallèles au plan des x_1x_2 et dans chacun de ces plans décrivons une circonférence de rayon r ayant son centre au point correspondant de l'arc PQ. Ces diverses circonférences engendreront une certaine surface Σ qui sera doublement connexe et limitée par les deux circonférences K et K' qui ont pour centres les points P et Q. De plus d'après ce mode de génération aucun point de la branche B ne peut se trouver sur la surface Σ.

Pour trouver le nombre des points d'intersection de cette surface Σ avec la courbe C, il faut maintenant chercher ce que M. Kronecker appelle (Berliner Monatsberichte, Mars 1869) la *caractéristique* du système des surfaces Σ, S et S_1. Le nombre des points d'intersection de ces trois surfaces, (ou si l'on veut de la surface Σ et de la courbe C) qui satisfont à certaines conditions, diminué du nombre des points d'intersection qui ne satisfont pas à ces mêmes conditions, est égal d'après le mémoire cité de M. Kronecker à une certaine intégrale. Cette intégrale est prise le long des limites du domaine Σ, c'est à dire le long des deux circonférences K et K'.

L'espace pourra être regardé comme partagé en quatre régions a, b, c, d suivant le signe des deux fonctions $\frac{dF}{dx_1}$ et $\frac{dF}{dx_2}$. Dans la région a, par exemple les deux fonctions seront positives; dans la région b, $\frac{dF}{dx_1}$

sera positif et $\frac{dF}{dx_2}$ négatif, etc. Δ étant positif au point P, on rencontrera en suivant la circonférence K les quatre régions dans l'ordre circulaire suivant $abcd$, pourvu toutefois que r soit suffisamment petit. Nous supposons qu'on ait parcouru K de façon à laisser à sa gauche la domaine Σ. L'intégrale de M. KRONECKER le long de K est alors égale à 1. Δ étant négatif au point Q, on rencontrera en suivant K' les quatre régions dans l'ordre circulaire $adcb$, si l'on décrit cette circonférence dans le même sens que K. Mais si l'on veut laisser le domaine Σ à sa gauche, il faut décrire K' en sens contraire et alors les quatre régions se succèdent dans l'ordre $abcd$. L'intégrale est donc encore égale à 1 et l'intégrale totale est égale à 2.

Le nombre des points d'intersection de Σ et de C est donc au moins égal à 2; et aucun de ces points ne peut appartenir à B. Il faut donc que par le point M passe une seconde branche de la courbe C.

C. Q. F. D.

(Dans le cas où le théorème de M. KRONECKER s'applique à une multiplicité à deux dimensions et à deux fonctions X et Y, et où par conséquent son intégrale doit être prise le long d'une courbe fermée, on voit aisément que cette intégrale est égale à la demi-différence du nombre de fois que $\frac{Y}{X}$ saute de $-\infty$ à $+\infty$ et du nombre de fois que $\frac{Y}{X}$ saute de $+\infty$ à $-\infty$.)

Le résultat s'étendrait sans peine au cas où nous aurions un plus grand nombre de variables. Le théorème de M. KRONECKER serait en effet encore applicable.

Résumons les résultats de ce paragraphe.

Les formes d'équilibre du système considéré sont données par les n équations:

$$\frac{dF}{dx_1} = \frac{dF}{dx_2} = \ldots = \frac{dF}{dx_n} = 0.$$

Ces n équations auront un certain nombre de solutions réelles et quand y variera d'une façon continue, ces solutions varieront elles-mêmes d'une façon continue de manière à former diverses *séries linéaires de formes d'équilibre.*

Il pourra d'ailleurs arriver qu'une même forme d'équilibre appartienne à la fois à deux ou plusieurs séries linéaires. Nous dirons alors que c'est une *forme de bifurcation.* On peut en effet, pour une valeur de y infiniment voisine de celle qui correspond à cette forme, trouver *deux* formes d'équilibre qui diffèrent infiniment peu de la forme de bifurcation.

Il peut arriver également que deux séries linéaires de formes d'équilibre réelles, viennent, quand on fait varier y, à se confondre, puis à disparaître, parce que les racines des équations d'équilibre deviennent imaginaires. La forme d'équilibre correspondante s'appellera alors *forme limite.*

Une forme d'équilibre ne peut être une forme de bifurcation ou une forme limite qu'à la condition que Δ soit nul. Il résulte de là que si les équations d'équilibre admettent pour une certaine valeur de y une solution pour laquelle Δ ne soit pas nul, elles en admettront encore une et infiniment peu différente de la première, pour les valeurs de y suffisamment voisines de celle que l'on avait considérée d'abord. En effet s'il n'en était pas ainsi, la forme d'équilibre qui correspond à la première solution serait une forme limite, ce qui exigerait que Δ fût nul.

Si l'on suit une série linéaire de formes d'équilibre réelles en faisant varier y et que l'on voie Δ s'annuler et changer de signe, la forme d'équilibre correspondante ne peut être une *forme limite* puisque les formes d'équilibre très voisines qui appartiennent à la série linéaire sont supposées réelles. Il résulte de ce qui précède que c'est toujours une *forme de bifurcation.*

Si enfin, en suivant une série linéaire de formes réelles, on voit Δ s'annuler, mais sans changer de signe, on est sûr, pour la raison que je viens de dire, que la forme correspondante n'est pas une forme limite. Elle peut être une forme de bifurcation, mais il n'en est pas toujours ainsi.

§ 3. *Echange des stabilités.*

Considérons la forme quadratique:

$$\Phi = \sum \frac{d^2F}{dx_i dx_k} X_i X_k \qquad (i=1, 2, \ldots, n;\ k=1, 2, \ldots, n)$$

contenant les n indéterminées $X_1, X_2, \ldots, X_n$. Cette forme aura pour discriminant Δ.

Pour que l'équilibre soit stable, il faut et il suffit (puisqu'il s'agit d'un équilibre absolu) que la fonction des forces F soit maximum, c'est à dire que la forme Φ soit définie négative.

Imaginons qu'on ait décomposé la forme Φ en une somme de n carrés:

$$\Phi = \sum \alpha_i Y_i^2 \qquad (i=1, 2, \ldots, n)$$

où Y_i est une fonction linéaire des X. Supposons que parmi les coëfficients α, que j'appellerai coëfficients de stabilité, il y en ait ν positifs et $n-\nu$ négatifs. Δ sera positif si $n-\nu$ est pair, et négatif si $n-\nu$ est impair. Δ sera nul quand un des coëfficients α s'annulera. Enfin il y aura stabilité si tous les coëfficients de stabilité sont négatifs. Il est inutile de faire observer que le nombre ν est indépendant de la manière dont la forme Φ a été décomposée en carrés.

Supposons que pour $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$, $y = 0$, on ait une forme d'équilibre de bifurcation, c'est à dire que les n dérivées partielles $\frac{dF}{dx_i}$ s'annulent ainsi que Δ. Je dis que nous pourrons toujours supposer que l'on a aussi:

$$\frac{d^2F}{dx_i dx_k} = 0. \qquad (i \gtrless k)$$

En effet, cela revient à dire que la forme Φ ne contient pas de termes rectangles; or s'il n'en était pas ainsi, on pourrait toujours décomposer la forme Φ en carrés, comme on l'a dit plus haut, c'est à dire qu'on pourrait, par une transformation linéaire, faire disparaître les termes rectangles. Les coëfficients de stabilité sont alors:

$$\frac{d^2F}{dx_1^2}, \quad \frac{d^2F}{dx_2^2}, \quad \ldots, \quad \frac{d^2F}{dx_n^2}.$$

Pour que Δ s'annule, il faut et il suffit qu'un ou plusieurs de ces coëfficients s'annulent. Supposons par exemple que $\frac{d^2F}{dx_1^2}$ s'annule et que les autres coëfficients ne s'annulent pas. Supposons enfin que la fonction F soit holomorphe et puisse se développer suivant les puissances de x et de y.

De l'équation:

$$\frac{dF}{dx_2} = 0$$

nous tirerons x_2 en fonction holomorphe de $x_1, x_3, \ldots, x_n$ et y. Pour que cela soit possible, il suffit que $\frac{d^2F}{dx_2^2}$ ne soit pas nul, ce qui a lieu en effet. Substituons ensuite partout à la place de x_2 la valeur ainsi trouvée. De l'équation:

$$\frac{dF}{dx_3} = 0$$

nous tirerons ensuite x_3 en fonction holomorphe de $x_1, x_4, \ldots, x_n$ et y. Cela est encore possible parce que $\frac{d^2F}{dx_3^2}$ n'est pas nul. On continuera de la sorte jusqu'à ce qu'il ne reste plus que deux variables x_1 et y et une seule équation d'équilibre:

$$\frac{dF}{dx_1} = 0.$$

Quant à $x_2, x_3, \ldots, x_n$, les autres équations d'équilibre, résolues comme on vient de le dire, les fournissent sous la forme:

$$x_2 = \varphi_2(x_1, y),\ x_3 = \varphi_3(x_1, y),\ \ldots,\ x_n = \varphi_n(x_1, y) \tag{1}$$

les φ étant holomorphes.

Quant à l'équation $\frac{dF}{dx_1} = 0$, elle s'écrira, toutes réductions faites:

$$0 = ax_1^2 + 2bx_1y + cy^2 + \theta \tag{2}$$

θ représentant un ensemble de termes de degré supérieur au second en x_1 et y. On voit que si x_1 et y sont les coordonnées d'un point dans un plan, cette équation représente une courbe à point double, ce qui montre de nouveau que la forme d'équilibre considérée est une forme de bifurcation. Nous supposerons

$$b^2 - ac \gtrless 0.$$

Nous tirerons alors de l'équation (2), x_1 en fonction de y de deux manières différentes

$$x_1 = \psi_1(y), \qquad x_1 = \psi_2(y) \tag{3}$$

les ψ étant holomorphes. Les deux équations (3) jointes aux équations (1) nous donnent les deux séries linéaires de formes d'équilibre.

Formons Δ et considérons le d'abord comme fonction de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ et y. En remplaçant $x_2, \ldots, x_n$ par leurs valeurs tirées des équations (1), Δ ne sera plus fonction que de x_1 et de y et on reconnaitra aisément que:

$$\Delta = 2M(ax_1 + by) + \Delta_1$$

M étant le produit des $n - 1$ dérivées $\frac{d^2F}{dx_2^2}, \frac{d^2F}{dx_3^2}, \ldots, \frac{d^2F}{dx_n^2}$ et Δ_1 étant un ensemble de termes de degré supérieur au premier.

L'équation $\Delta = 0$ représentera alors une courbe Δ passant par l'origine dans le plan des x, y et l'équation (2) représentera une courbe C formée de deux branches B et B'. Les équations de ces deux branches de courbe qui ne sont autres que les équations (3) pourront s'écrire:

$$x_1 = y\left(\frac{-b - \sqrt{b^2 - ac}}{a}\right) + Y_1$$

$$x_1 = y\left(\frac{-b - \sqrt{b^2 - ac}}{a}\right) + Y_2$$

Y_1 et Y_2 étant des termes de degré supérieur au premier. Si dans l'expression Δ on remplace x_1 par $\psi_1(y)$ ou par $\psi_2(y)$ on trouve:

$$\Delta = \pm 2M\sqrt{b^2 - ac}\, y + \Delta_2$$

Δ_2 représentant un ensemble de termes de degré supérieur au premier. Le signe $+$ se rapporte à la substitution de ψ_1, c'est à dire à la branche B et le signe $-$ à la substitution de ψ_2, c'est à dire à la branche B'.

Ainsi que l'on suive la branche B ou la branche B', on verra Δ changer de signe en même temps que y. De plus pour toutes les valeurs de y, voisines de 0, Δ a des valeurs de signe contraire selon qu'on suit la branche B ou la branche B'. Par exemple, pour y positif, Δ sera positif sur la branche B et négatif sur la branche B'; pour y négatif, ce sera le contraire, Δ sera négatif sur la branche B et positif sur la branche B'.

Supposons qu'à l'origine, un des coëfficients de stabilité soit nul (ce qui est conforme à l'hypothèse faite plus haut), que ν de ces coëfficients soient négatifs et $n - \nu - 1$ positifs. Dans le voisinage de l'origine, il y aura toujours (par raison de continuité) ν ou $\nu + 1$ coëfficients de stabilité négatifs. Si ν est pair, il y en aura ν toutes les fois que Δ sera positif et $\nu + 1$ toutes les fois que Δ sera négatif. Ce sera le contraire si ν est impair.

Il résulte de là que, si pour y positif, on a ν coëfficients négatifs sur la branche B et $\nu + 1$ coëfficients négatifs sur la branche B'; ce sera l'inverse pour y négatif et on aura alors $\nu + 1$ coëfficients négatifs sur la branche B et ν sur la branche B'. Si au contraire, on a, pour y positif, $\nu + 1$ coëfficients négatifs sur la branche B et ν sur la branche B', on aura inversement, pour y négatif, ν coëfficients négatifs sur la branche B et $\nu + 1$ sur la branche B'.

Pour qu'il y ait stabilité, il faut et il suffit que tous les coëfficients de stabilité soient négatifs. Si donc pour y positif, il y a stabilité sur la branche B et instabilité sur la branche B', ce sera l'inverse pour y négatif. De même si pour y positif il y a instabilité sur la branche B et stabilité sur B', ce sera encore l'inverse pour y négatif. En d'autres termes, il y a *échange des stabilités* entre les deux branches B et B' au moment où elles se croisent.

Pour établir ce résultat, j'ai supposé, non seulement que F était continue ainsi que ses dérivées des deux premiers ordres, mais encore que cette fonction était holomorphe. Cette hypothèse n'est nullement nécessaire. Pour le faire voir, je vais reprendre le raisonnement en supposant $n = 1$.

Dans ce cas la courbe C se réduit à une courbe plane et Δ à $\frac{d^2F}{dx^2}$. Soit o le point du plan qui correspond à la forme d'équilibre de bifurcation. Du point o comme centre décrivons un cercle K de rayon très petit. Ce cercle K rencontrera la courbe C en un certain nombre de points. Il résulte du raisonnement du paragraphe précédente, que si un arc de courbe joint deux points de C où le signe de Δy ne soit pas le même, cet arc devra couper la courbe C en un nombre impair de points; et que si au contraire Δy a même signe aux deux extrémités, l'arc de courbe considéré devra couper C en un nombre pair de points. Donc si l'on envisage les différents points d'intersection de C et de K dans l'ordre où on les rencontre en suivant le cercle K, on verra que

Δy y sera alternativement positif et négatif. Le nombre total des points d'intersection est donc pair. Si nous supposons en particulier que deux branches de courbe seulement viennent passer au point o, nous aurons alors deux points d'intersection α_1 et α_2 où y sera négatif et deux points d'intersection β_1 et β_2 où y sera positif. La branche $o\beta_1$ devra alors être regardée comme le prolongement de la branche $\alpha_1 o$, de même que $o\beta_2$ comme le prolongement de $\alpha_2 o$. Je suppose, pour fixer les idées, qu'en α_1, Δ soit positif. Alors d'après la règle qui précède, Δ sera négatif en α_2, négatif encore en β_1 et positif en β_2, ce qui confirme le résultat précedemment obtenu. Il serait aisé, d'après les considérations que je viens d'exposer, de voir ce qui se passerait si plus de deux branches de courbe venaient passer en o.

Nous avons dit plus haut que si en suivant une série réelle de formes d'équilibre, on voyait Δ s'annuler sans changer de signe, on ne pouvait affirmer que la forme correspondante fût une forme de bifurcation. Nous pouvons remarquer que Δ peut de deux manières s'annuler sans changer de signe. Il peut arriver ou bien que plusieurs coëfficients de stabilité s'annulent sans changer de signe; ou bien que deux (ou un nombre pair) de ces coëfficients changent de signe. Dans le premier cas, nous ne pouvons en effet rien affirmer; voyons ce qui ce passe dans le second.

Nous supposerons pour fixer les idées que

$$\frac{d^2F}{dx_i dx_k} = 0, \qquad (i \gtrless k) \qquad \frac{d^2F}{dx_1^2} = \frac{d^2F}{dx_2^2} = 0,$$

$$\frac{d^2F}{dx_3^2} \gtrless 0, \quad \frac{d^2F}{dx_4^2} \gtrless 0, \quad \ldots, \quad \frac{d^2F}{dx_n^2} \gtrless 0.$$

Il arrivera alors que des $n - 2$ équations d'équilibre

$$\frac{dF}{dx_3} = \frac{dF}{dx_4} = \ldots = \frac{dF}{dx_n} = 0$$

on pourra tirer $x_3, x_4, \ldots, x_n$ en fonctions holomorphes de x_1, x_2 et y. Si dans les deux autres équations d'équilibre:

$$\frac{dF}{dx_1} = \frac{dF}{dx_2} = 0$$

on substitue ces valeurs de $x_3, x_4, \ldots, x_n$, ces équations deviennent:

$$(4) \qquad \begin{aligned} \Phi_1 + \Phi_2 &= 0 \\ \Phi'_1 + \Phi'_2 &= 0, \end{aligned}$$

où Φ_1 et Φ'_1 représentent un ensemble de termes du 2[d] degré en x_1, x_2, y et Φ_2 et Φ'_2 un ensemble de termes de degré supérieur au second; (si l'on suppose comme plus haut que la position d'équilibre envisagée soit $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = y = 0$).

Regardons x_1, x_2 et y comme les coordonnées d'un point dans l'espace. Les deux équations (4) représenteront deux surfaces ayant chacune à l'origine un point conique du 2[d] ordre. L'intersection de ces deux surfaces sera la courbe C. On voit que par l'origine passeront 4 branches de la courbe C, réelles ou imaginaires. Mais une de ces 4 branches est certainement réelle, puisque j'ai supposé au début qu'on a pu suivre dans le voisinage de la position d'équilibre envisagée, une série de formes d'équilibre réelles. Il faut donc quil y ait une autre des quatre branches qui soit réelle. La forme d'équilibre envisagée est donc de bifurcation.

D'où la conclusion suivante:

Pour qu'une forme d'équilibre appartenant à une série linéaire réelle soit de bifurcation, il suffit, non seulement que Δ change de signe, mais que l'un quelconque des coëfficients de stabilité change de signe.

§ 4. *Cas d'un nombre infini de variables.*

Les problèmes traités dans les deux paragraphes précédents ne présentent aucune espèce de difficulté. Malheureusement lorsqu'on recherche la figure d'équilibre d'une masse fluide soumise à diverses forces, la question est beaucoup plus compliquée. En effet la figure d'une pareille masse dépend, non pas d'un nombre fini de variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$, mais d'un nombre infini de variables.

Supposons par exemple une aire plane A peu différente d'un cercle; l'équation de la courbe qui limite cette aire plane pourra s'écrire, en coordonnées polaires (ρ et φ)

$$\rho = r + \beta_1 \cos\varphi + \beta_2 \cos 2\varphi + \ldots + \beta_n \cos n\varphi + \ldots$$
$$+ \gamma_1 \sin\varphi + \gamma_2 \sin 2\varphi + \ldots + \gamma_n \sin n\varphi + \ldots$$

les β et les γ étant très petits par rapport à r, et la figure de l'aire plane dépendra des coëfficients r, β et γ qui sont en nombre infini.

Supposons que tous les éléments de l'aire A s'attirent en raison inverse des distances et en raison directe de leurs surfaces. Il résultera de cette attraction une énergie potentielle W qui sera représentée par l'intégrale suivante:

$$W = \iint d\omega\, d\omega' \log \frac{1}{\Delta}$$

$d\omega$ et $d\omega'$ étant deux éléments quelconques de l'aire A et Δ la distance de ces deux éléments. On reconnait alors que W est une fonction holomorphe de r, des β et des γ. Je veux dire que si l'on fait varier seulement un nombre fini n de ces coëfficients, les autres restant constants, W sera une fonction holomorphe des n coëfficients variables.

Supposons que les β et les γ étant regardés comme très petits, on calcule l'intégrale W en négligeant les cubes des β et des γ. On trouvera:

$$W = \frac{\pi^2 r^4}{2}\left(\log\frac{1}{r} + \frac{1}{4}\right) + \frac{\pi^2 r^2}{2}\sum\nolimits_n (\beta_n^2 + \gamma_n^2)\left(\frac{1}{n} - 1 + \log\frac{1}{r}\right).$$

On pourra tirer de là la conclusion suivante:

Si l'on suppose que l'aire A soit assujettie à être équivalente à une aire donnée πr_0^2 de telle sorte que:

$$(1) \qquad r^2 + \sum \frac{\beta_n^2 + \gamma_n^2}{2} = r_0^2$$

et qu'en même temps β_1 et γ_1 soient assujettis à être nuls, le cercle dont le rayon est r_0 sera une forme d'équilibre de l'aire A.

On déduit de (1) que

$$r^2 = r_0^2 - \sum \frac{\beta_n^2 + \gamma_n^2}{2}$$

et en négligeant toujours les cubes des β et des γ

$$W = \frac{\pi^2 r_0^4}{2}\left(\log\frac{1}{r_0} + \frac{1}{4}\right) + \frac{\pi^2 r_0^2}{2}\sum (\beta_n^2 + \gamma_n^2)\left(\frac{1}{n} - 1\right).$$

Il est d'ailleurs aisé de voir que si l'on regarde W comme une fonction d'un nombre fini des coëfficients β et γ, les autres coëfficients restant constants, on aura:

$$\frac{d^2W}{d\beta_n d\gamma_n} = 0, \qquad \frac{d^2W}{d\beta_n^2} = \frac{d^2W}{d\gamma_n^2} = 2\left(\frac{1}{n} - 1\right)$$

$$\frac{d^2W}{d\beta_i d\beta_k} = \frac{d^2W}{d\gamma_i d\gamma_k} = 0. \qquad (i \gtrless k)$$

Il résulte de là que la série infinie

$$\pi^2 r_0^2 \sum (\beta_n^2 + \gamma_n^2)\left(\frac{1}{n} - 1\right) \qquad (n = 2, 3, \ldots, \text{ad inf.})$$

joue le même rôle que jouait la forme quadratique Φ dans le paragraphe précédent, avec cette différence, qu'au lieu d'un nombre fini de variables $X_1, X_2, \ldots, X_n$, il y entre un nombre infini de variables β_n et γ_n.

Les coëfficients de stabilité sont alors les quantités $\pi r_0^2\left(\frac{1}{n} - 1\right)$. On voit que tous ces coëfficients sont négatifs, de telle façon que l'équilibre est stable.

Cet exemple permet de voir comment la notion des coëfficients de stabilité peut s'étendre au cas où l'équilibre dépend d'un nombre infini de conditions.

On peut de même étendre à ce cas la notion des formes d'équilibre de bifurcation et des formes d'équilibre limite. Supposons en effet que les forces auxquelles sont soumis les éléments de l'aire A dépendent d'un paramètre y. Pour chaque valeur de y nous aurons un certain nombre de formes d'équilibre. Lorsque y variera, ces formes varieront aussi, en général d'une manière continue. On aura ainsi un certain nombre de séries linéaires de formes d'équilibre. Pour chacune de ces séries, les coëfficients β et γ seront des fonctions finies, continues, uniformes et réelles de y. Il pourra arriver alors que quand y tendra vers une certaine valeur α, deux formes d'équilibre réelles, appartenant à deux de ces séries linéaires, tendront à se confondre. Lorsque y aura dépassé cette valeur α, il arrivera, ou bien que les deux formes d'équilibre envisagées disparaîtront et cesseront d'être réelles, ou bien qu'elles resteront réelles et cesseront de se confondre. Dans le premier cas, on aura une forme d'équilibre limite. Dans le second cas, une forme d'équilibre de bifurcation. Rien n'est donc changé à ces définitions qui restent les mêmes que dans les cas précédemment examinés.

Il reste à étendre les résultats du paragraphe précédent au cas qui nous occupe actuellement. Il faut montrer que:

1°. Pour une forme d'équilibre limite, l'un des coëfficients doit s'annuler.

2°. Si l'on suit une série linéaire de formes d'équilibre et si l'on voit un des coëfficients de stabilité changer de signe, la forme qui correspond à la valeur de y pour laquelle se fait le changement de signe, est une forme de bifurcation.

3°. La loi de l'échange des stabilités s'étend au cas qui nous occupe.

Nous démontrerons ces trois propositions en partant de l'hypothèse suivante:

Le nombre des variables étant infini, celui des coëfficients de stabilité devra également être infini; *mais je supposerai que parmi les coëfficients, il n'y en a qu'un nombre fini qui soient positifs.*

J'appellerai $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ les variables qui définissent la forme du système et y un paramètre dont dépendront les forces qui agissent sur ce système. Je supposerai que ces variables ont été choisies de telle sorte que pour la forme d'équilibre envisagée et que nous appellerons A, on ait:

$$0 = y = x_1 = x_2 = \ldots = x_n = \ldots$$

Si dans la fonction des forces $F(x, y)$ on fait $y = 0$, nous pouvons encore supposer que les variables x aient été choisies de telle sorte que l'on puisse écrire, en négligeant les cubes des quantités x supposées très petites:

$$F(x, 0) = A + \alpha_1 x_1^2 + \alpha_2 x_2^2 + \ldots + \alpha_n x_n^2 + \alpha_{n+1} x_{n+1}^2 + \ldots + \alpha_p x_p^2 + \ldots$$

Nous supposerons, conformément à l'hypothèse faite plus haut, que parmi les n coëfficients $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ il peut y en avoir de positifs ou de nuls, mais que tous les coëfficients suivants $\alpha_{n+1}, \alpha_{n+2}, \ldots, \alpha_p, \ldots$ sont négatifs.

Avant d'aller plus loin, je dois faire une autre remarque. Quand nous n'avions qu'un nombre fini de variables, nous regardions la fonction F comme définie pour toutes les valeurs des x, ou du moins pour toutes les valeurs suffisamment petites de ces variables. Il n'en peut plus être de même ici. La fonction F ne sera définie que quand une certaine série à termes positifs:

$$\lambda_1 |x_1| + \lambda_2 |x_2| + \lambda_3 |x_3| + \ldots + \lambda_n |x_n| + \ldots \tag{2}$$

sera convergente. Le choix des variables x étant encore arbitraire dans une certaine mesure, nous pouvons supposer qu'on les ait choisies de façon que tous les λ soient égaux à 1.

Cela posé, nous pouvons passer à la démonstration des trois propositions énoncées ci-dessus.

1°. Je dis d'abord que si aucun des coëfficients α n'est nul, la forme A ne pourra être une forme limite, c'est à dire que pour des valeurs de y très petites (mais d'ailleurs positives ou négatives), le système sera susceptible d'une forme d'équilibre très voisine de cette forme A.

Pour le démontrer, je vais introduire dans le système des liaisons exprimées par les équations suivantes:

$$x_1 = y_1, \quad x_2 = y_2, \quad \ldots, \quad x_n = y_n,$$

$y_1, y_2, \ldots, y_n$ étant des constantes que nous regarderons comme données. Les conditions de l'équilibre du système assujetti à ces liaisons, dépendront naturellement du choix des $n + 1$ paramètres $y, y_1, y_2, \ldots, y_n$ et elles seront exprimées par les équations en nombre infini:

$$0 = \frac{dF}{dx_{n+1}} = \frac{dF}{dx_{n+2}} = \ldots = \frac{dF}{dx_p} = \ldots$$

Dans le cas particulier ou

$$y = y_1 = y_2 = \ldots = y_n = 0$$

l'équilibre aura lieu pour:

$$0 = x_{n+1} = x_{n+2} = \ldots = x_p = \ldots$$

c'est à dire en même temps que l'équilibre du système supposé libre. Mais il y a une différence importante entre les deux cas. L'équilibre du système libre est instable parce que parmi les coëfficients $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, il y en a de positifs. L'équilibre du système à liaisons sera stable parce que tous les coëfficients $\alpha_{n+1}, \alpha_{n+2}, \ldots, \alpha_p, \ldots$ sont négatifs.

Je dis que pour les valeurs des $n + 1$ paramètres y suffisamment voisines de 0, le système à liaisons sera susceptible d'une forme d'équilibre stable très voisine de la forme A. En d'autres termes, si l'on fait:

$$y = \beta,\ y_1 = \beta_1,\ \ldots,\ y_n = \beta_n \tag{3}$$

on pourra prendre les β assez petits pour que la fonction F soit susceptible d'un maximum (en tenant compte des liaisons) et pour que ce maximum ait lieu pour des valeurs des x aussi petites que l'on veut.

Appelons en effet D le domaine comprenant tous les systèmes de valeurs des variables $x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_p, \ldots$ qui sont telles que la série

$$- \alpha_{n+1}x_{n+1}^2 - \alpha_{n+2}x_{n+2}^2 - \ldots - \alpha_p x_p^2 - \ldots \tag{4}$$

soit convergente et ait une somme plus petite que ε. La limite du domaine D se composera d'un domaine δ comprenant tous les systèmes des valeurs des x tels que la série (4) soit convergente et ait une somme égale à ε.

Quand les y sont nuls, la fonction F est égale à A quand les x sont nuls, et à $A - \varepsilon + \zeta$ quand les x appartiennent au domaine δ (ζ étant un infiniment petit d'ordre supérieur à celui de ε). Donnons maintenant aux y les valeurs (3). La fonction F étant continue, nous pourrons prendre les β assez petits pour que F diffère aussi peu que nous voudrons de A quand les x sont nuls, et aussi peu que nous vondrons de $A - \varepsilon + \zeta$ quand les x appartiennent au domaine δ. On pourra donc prendre les β assez petits pour que F soit plus grand quand les x sont nuls qu'en aucun point du domaine δ.

Il en résulte que la fonction F prendra en certains points du domaine D des valeurs plus grandes qu'en aucun des points de la limite de ce domaine. Il faut donc conclure qu'en un certain point du domaine D, la fonction F atteint un maximum. Il est necessaire toutefois, pour que cette conclusion s'impose, que l'on admette que la fonction F ne va pas en augmentant indéfiniment à mesure que la série (2) devient de moins en moins convergente. Il y aurait bien des objections à faire, mais on ne saurait exiger en mécanique la même rigueur qu'en analyse pure pour ce qui concerne l'infini.

Le principe auquel nous sommes ainsi conduits peut s'énoncer ainsi:

Si un système mécanique quelconque, et en particulier une masse fluide, sont en équilibre stable sous l'action de certaines forces, et si on vient y appliquer en outre des forces perturbatrices infiniment petites, ce système prendra sous l'action de ces forces, une figure d'équilibre stable infiniment peu différente de sa figure primitive.

Je ne crois pas qu'on puisse le mettre sérieusement en doute, malgré les objections dont je viens de parler et qui sont de nature à intéresser plutôt l'analyste que le mécanicien.

Cela posé, la forme d'équilibre stable du système à liaisons doit être regardée comme définie; elle le sera par exemple par les équations

$$(5) \quad x_{n+1} = \varphi_{n+1}(\beta, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n); \quad x_{n+2} = \varphi_{n+2}(\beta, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n); \ldots$$

Les fonctions φ seront des fonctions continues des β et elles s'annuleront avec β quelles que soient les valeurs de $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$.

Si nous substituons dans F ces valeurs des $x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_p, \ldots$, cette fonction ne dépendra plus que de $\beta, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$.

Il faut maintenant chercher quelles valeurs on doit donner à $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ pour que l'équilibre subsiste (sans toutefois rester stable) quand on supprime les liaisons. Il faut pour cela que l'on ait:

$$\frac{dF}{d\beta_1} = \frac{dF}{d\beta_2} = \ldots = \frac{dF}{d\beta_n} = 0.$$

En d'autres termes, il faut considérer que, les x étant définis par les équations (5), la figure du système ne dépend plus que des n variables $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$, et il faut chercher les conditions d'équilibre du système ainsi défini.

Je veux faire voir que pour les valeurs de β voisines de 0, ce système admet une forme d'équilibre. Pour cela il me suffit, puisque ce système ne dépend plus que d'un nombre fini de variables, de chercher les coëfficients de stabilité pour $\beta = 0$.

Or pour $\beta = 0$, puisque les fonctions φ s'annulent, on a:

$$F = A + \alpha_1\beta_1^2 + \alpha_2\beta_2^2 + \ldots + \alpha_n\beta_n^2 + Z$$

Z étant un ensemble de termes d'ordre supérieur au second par rapport aux β. Les coëfficients de stabilité sont donc:

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$$

et, comme aucun d'eux n'est nul, la forme d'équilibre considérée ne peut être une forme limite, et l'équilibre sera encore possible pour les valeurs de β voisines de o.

Ainsi, même lorsque la forme du système dépend d'un nombre infini de variables, une figure d'équilibre ne peut être une figure limite à moins que l'un des coëfficients de stabilité ne s'annule.

2° et 3°. Il resterait à établir les deux autres propositions enoncées plus haut. On les démontrerait par une méthode absolument identique. On introduirait dans le système les liaisons

$$x_1 = \beta_1,\ x_2 = \beta_2,\ \ldots,\ x_n = \beta_n \tag{6}$$

de façon que la forme d'équilibre A devienne stable. On trouverait alors que pour:

$$y = \beta,\ x_1 = \beta_1,\ \ldots,\ x_n = \beta_n$$

le système à liaisons est susceptible d'une position d'équilibre stable définie par les équations

$$x_{n+1} = \varphi_{n+1}(\beta, \beta_1, \ldots, \beta_n);\ \ldots \tag{5}$$

Si l'on suppose maintenant les x assujettis à ces équations (5), mais que l'on supprime les liaisons (6), la fonction F ne dépend plus que des β, la figure du système ne dépend plus que de n variables. On est donc ramené au cas d'un nombre fini de variables, auquel les propositions énoncées s'appliquent d'elles-mêmes.

En résumé, il résulte des considérations exposées dans ce paragraphe que les résultats des paragraphes 2 et 3 s'étendent au cas d'un système dont la figure dépend d'une infinité de variables, et en particulier au cas d'une masse fluide soumise à différentes forces.

§ 5. *Première application.*

MM. Tait et Thomson ont annoncé sans démonstration que, parmi les figures d'équilibre dont est susceptible une masse fluide animée d'un mouvement de rotation, il y a une figure annulaire de révolution.

On peut démontrer ce résultat en appliquant les principes exposés dans les trois paragraphes précédents.

Je considère une masse fluide homogène égale à M et animée d'une vitesse de rotation ω autour d'un axe quelconque que je prendrai pour axe des z. Je suppose que toutes les molécules de cette masse s'attirent conformément à la loi de Newton. Je choisirai les unités de telle façon que la densité du fluide soit égale à 1, et que l'attraction de deux unités de masse à l'unité de distance soit égale à l'unité de force.

Je puis assujettir la masse fluide à affecter la forme d'une figure de révolution. Si l'équilibre a lieu en tenant compte de cette liaison, il arrivera, en vertu de la nature même du problème, que l'équilibre subsistera encore quand elle sera supprimée. Cette liaison ne change pas les conditions d'équilibre, elle n'influe que sur les conditions de stabilité dont nous ne nous occuperons pas pour le moment.

Soit R la distance à l'axe du centre de gravité de la section méridienne et πr_0^2 l'aire de cette section. On aura:

$$M = 2\pi^2 r_0^2 R. \tag{1}$$

Le plan des xy sera le plan perpendiculaire à l'axe et passant par ce centre de gravité. J'assujettirai encore, pour simplifier un peu les calculs qui vont suivre, la figure de la masse fluide à rester symétrique par rapport au plan des xy. Il est clair que si l'équilibre a lieu avec cette liaison, il subsistera encore sans cette liaison.

Pour définir la section méridienne, je me servirai des coordonnées polaires ρ et φ, en prenant le pôle au centre de gravité et l'axe polaire dans le plan des xy. Soit:

$$\rho = r + \beta_1 \cos\varphi + \beta_2 \cos 2\varphi + \ldots + \beta_n \cos n\varphi + \ldots$$

l'équation de la section méridienne.

Ecrivons que l'aire de cette section est égale à πr_0^2, il viendra:

$$r_0^2 = r^2 + \frac{\Sigma \beta^2}{2}. \tag{2}$$

Ecrivons que le centre de gravité de cette section est au pôle, il viendra

$$r^2\beta_1 + r(\beta_1\beta_2 + \beta_2\beta_3 + \ldots + \beta_n\beta_{n+1} + \ldots) + S = 0 \tag{3}$$

S étant une série convergente dont les termes sont homogènes et du troisième degré par rapport aux β.

J'ai à rechercher s'il existe une figure d'équilibre peu différente d'un tore. Je dois donc supposer que les β sont très petits par rapport à r.

Je supposerai de plus que les rapports $\frac{r}{R}$ et par conséquent $\frac{r_0}{R}$ sont très petits, ainsi que ω.

Cela posé soit I le moment d'inertie de la masse fluide par rapport à l'axe. Soit:

$$W = \int \frac{dm\, dm'}{\Delta}$$

l'énergie potentielle due à l'attraction newtonienne (où dm et dm' sont deux éléments quelconques de la masse et Δ la distance de ces deux éléments). Soit:

$$\frac{\omega^2}{2} I$$

l'énergie potentielle due à la force centrifuge. L'équilibre aura lieu quand la variation première de l'expression

$$U = W + \frac{\omega^2}{2} I$$

sera nulle.

Nous allons encore introduire une liaison nouvelle. Nous supposerons que r_0 et par conséquent R sont assujettis à conserver des valeurs données. Cette liaison, à la différence des précédentes, change les conditions d'équilibre. Posons:

$$\beta_i = \gamma_i r_0, \qquad U = A r_0^4 R\left(\log\frac{8R}{r_0} + V + H\right). \tag{4}$$

Il viendra, en tenant compte de (2)

$$(5) \qquad U = A\left[r_0^4 R\left(\log\frac{8R}{r_0} + \frac{1}{4}\right) + \Sigma R\beta_n^2 r_0^2\left(\frac{1}{n} - 1\right)\right] + B + C$$
$$+ \frac{\omega^2\pi^2}{2}\left(2r_0^2R^3 + \frac{3}{2}Rr_0^4\right) + \omega^2 D.$$

Dans cette équation, A designe une constante numérique qu'il est inutile de déterminer davantage; B est un ensemble de termes contenant r_0^5 en facteur; C est un ensemble de termes de degré supérieur au second par rapport aux β; enfin D est un ensemble de termes s'annulant avec les β.

Nous donnerons à A la même valeur dans les équations (4) et (5). Il viendra alors:

$$V = \frac{1}{4} + \sum r_n^2\left(\frac{1}{n} - 1\right) + \frac{B}{Ar_0^4R} + \frac{C}{Ar_0^4R} + \frac{\pi^2\omega^2}{2A}\left(\frac{2R^2}{r_0^2} + \frac{3}{2}\right) + \frac{\omega^2 D}{Ar_0^4R} - H.$$

On trouve aisément:

$$I = \pi\int_0^{2\pi} R^3\rho^2 d\varphi + 2\pi\int_0^{2\pi} R^2\rho^3\cos\varphi d\varphi + \frac{3}{2}\pi\int_0^{2\pi} R\rho^4\cos^2\varphi d\varphi + \frac{2\pi}{5}\int_0^{2\pi}\rho^5\cos^3\varphi d\varphi.$$

Mais les équations (2) et (3) peuvent s'écrire:

$$\int\rho^2 d\varphi = 2\pi r_0^2, \qquad \int\rho^3\cos\varphi d\varphi = 0$$

de sorte qu'il reste simplement:

$$D = \frac{3}{4}\pi R\int(\rho^4 - r_0^4)\cos^2\varphi d\varphi + \frac{\pi}{5}\int(\rho^5 - r_0^5)\cos^3\varphi d\varphi.$$

Nous prendrons

$$H = \frac{\pi^2\omega^2}{A}\frac{R^2}{r_0^2}$$

de sorte que V sera désormais déterminé.

Comme r_0 et R sont provisoirement regardés comme des constantes, le maximum de U aura lieu en même temps que celui de V, de sorte que l'équilibre de notre système à liaisons aura lieu dans les mêmes conditions que si V était la fonction des forces.

Supposons que dans V, on fasse $r_0 = 0$, il viendra

$$V = \frac{1}{4} + \sum \gamma_n^2 \left(\frac{1}{n} - 1\right) + \frac{C}{A r_0^4 R} + \frac{3}{4}\frac{\pi^2\omega^2}{A} + \frac{3}{4}\frac{\pi\omega^2}{A}\int\left(\frac{\rho^4}{r_0^4} - 1\right)\cos^2\varphi d\varphi.$$

Si nous faisons encore $\omega = 0$, il viendra:

$$V = \frac{1}{4} + \sum \gamma_n^2 \left(\frac{1}{n} - 1\right) + \frac{C}{A r_0^4 R}.$$

Si l'on tient compte de l'équation (3), il vient:

$$\gamma_1 = E$$

E étant un ensemble de termes du second degré au moins par rapport à $\gamma_2, \gamma_3, \ldots$. On peut donc écrire:

$$V = \frac{1}{4} + \sum_{n=2}^{\infty} \gamma_n^2 \left(\frac{1}{n} - 1\right) + F$$

F étant un ensemble de termes du troisième degré au moins par rapport à $\gamma_2, \gamma_3, \ldots$.

Cette équation prouve que si l'on fait $\omega = r_0 = 0$, la fonction V est susceptible d'un maximum qui est atteint quand tous les γ s'annulent. Les coëfficients de stabilité sont:

$$\frac{1}{2} - 1, \quad \frac{1}{3} - 1, \quad \ldots, \quad \frac{1}{n} - 1, \quad \ldots$$

Comme aucun de ces coëfficients n'est nul, la forme d'équilibre correspondante ne pourra être une forme limite, c'est à dire que pour les valeurs très petites de r_0 et de ω, le système à liaisons considéré sera susceptible d'une forme d'équilibre, pour laquelle les γ auront des valeurs très petites.

On aura alors pour cette forme d'équilibre:

$$\gamma_n = \varphi_n(r_0, \omega) \tag{6}$$

φ_n étant une fonction continue de r_0 et de ω s'annulant avec ces variables.

Il reste à chercher quelle valeur il faut donner à r_0 pour que l'équilibre subsiste encore quand on supprime la liaison que nous avions provisoirement introduite, et quand on n'assujettit plus r_0 et R à avoir des valeurs données.

Supposons qu'on remplace dans U les γ par leurs valeurs (6) et R par sa valeur tirée de l'équation (1). Alors U ne sera plus fonction que de r_0 et de ω, et on aura la condition pour que l'équilibre subsiste après la suppression de la liaison, en écrivant:

$$\frac{dU}{dr_0} = 0. \tag{7}$$

Je dis que pour les valeurs très petites de ω, il y aura toujours une valeur très petite de r_0 pour laquelle cette condition (7) sera remplie. Nous pourrons écrire:

$$U = Ar_0^2 \log \frac{\alpha}{r_0^3} + \frac{B\omega^2}{r_0^4} + C. \tag{8}$$

Les lettres A, α et B désignent des constantes ne dépendant que de M et C un ensemble de termes très petits par rapport aux deux premiers quand r_0 et ω sont très petits. Inutile d'ajouter que les lettres A, B et C n'ont plus la même signification que dans la première partie de cette démonstration.

Soit s une quantité très petite que nous regarderons comme constante et qui sera telle que:

$$2As \log \frac{\alpha}{s^3} - 3As - \frac{4B\omega^2}{s^5} = 0.$$

Nous allons faire varier r_0 depuis $2s$ jusqu'à 0. Pour $r_0 = 2s$, les deux premiers termes de l'expression (8) se réduisent à:

$$4As^2 \log \frac{\alpha}{8s^3} + \frac{1}{32} As^2 \log \frac{\alpha}{s^3} - \frac{3}{64} As^2 = \frac{125}{32} As^2 \log \frac{\alpha}{s^3} + S_1.$$

Pour $r_0 = s$, ces deux mêmes termes se réduisent à

$$As^2 \log \frac{\alpha}{s^3} + \frac{1}{2} As^2 \log \frac{\alpha}{s^3} - \frac{3}{4} As^2 = \frac{48}{32} s^2 \log \frac{\alpha}{s^3} + S_2.$$

Enfin pour $r_0 = 0$, on a $U = +\infty$. Dans ces égalités, S_1 et S_2 désignent des termes très petits par rapport à $s^2 \log \frac{a}{s^3}$.

On a donc:

$$\text{pour } r_0 = 2s \qquad U - \frac{100}{32} s^2 \log \frac{a}{s^3} = \frac{25}{32} s^2 \log \frac{a}{s^3} + \Sigma_1$$

$$\text{pour } r_0 = s \qquad U - \frac{100}{32} s^2 \log \frac{a}{s^3} = -\frac{52}{32} s^2 \log \frac{a}{s^3} + \Sigma_2$$

$$\text{pour } r_0 = 0 \qquad U - \frac{100}{32} s^2 \log \frac{a}{s^3} = +\infty;$$

Σ_1 et Σ_2 sont des ensembles de termes très petits par rapport à $s^2 \log \frac{a}{s^3}$, et qui n'influent pas sur le signe de l'expression

$$U - \frac{100}{32} s^2 \log \frac{a}{s^3}.$$

Cette expression est donc positive pour $r_0 = 2s$, négative pour $r_0 = s$ et positive pour $r_0 = 0$. Elle s'annule donc deux fois quand r_0 varie de $2s$ à 0; sa dérivée $\frac{dU}{dr_0}$ doit donc s'annuler une fois dans le même intervalle.

C. Q. F. D.

Ainsi pour une valeur donnée très petite de ω, on peut trouver un système de valeurs de r_0 et des γ qui satisfasse aux conditions d'équilibre, et cela après suppression de la liaison que j'avais d'abord provisoirement introduite.

Il en résulte qu'une masse fluide animée d'un mouvement de rotation est susceptible d'une forme annulaire d'équilibre, qui d'ailleurs est probablement instable.

J'ai donné une esquisse de la présente démonstration dans le Tome II du Bulletin Astronomique. J'ai donné également dans ce même volume une façon de calculer approximativement les éléments de cette figure annulaire. L'analyse que j'ai employée pour déterminer ces éléments présente le plus grandes analogies avec celle dont M^me^ Kowalevski a fait usage dans ses recherches sur l'anneau de Saturne.

§ 6. *Exemples d'équilibres de bifurcation.*

Dans les N^{os} 27 et 28 du Livre III de la *Mécanique Céleste,* LAPLACE traite le problème suivant: Une sphère solide, de densité ρ et de rayon c est recouverte d'une couche fluide homogène de densité 1. Quelle est la figure d'équilibre de cette couche fluide? Quelle sera à l'état d'équilibre la forme de la surface libre de cette couche?

Une des formes d'équilibre est évidemment une sphère concentrique à la sphère solide, auquel cas l'épaisseur de la couche fluide est uniforme.

On peut se demander s'il y en a d'autres. Pour cela appelons

$$r = a(1 + \alpha y)$$

la distance au centre d'un point quelconque de la surface libre. On développera y en série de fonctions sphériques:

$$y = Y_0 + Y_1 + \ldots + Y_i + \ldots$$

et l'équation d'équilibre, comme l'indique LAPLACE page 87 (édition de 1878), s'écrira:

$$(1) \quad 0 = \left[(1-\rho)\frac{c^3}{a^3} + 2\right] Y_0 + (1-\rho)\frac{c^3}{a^3} Y_1 + \left[(1-\rho)\frac{c^3}{a^3} - \frac{2}{5}\right] Y_2 + \ldots$$

pourvu toutefois que l'on néglige le carré de α.

Quant à l'énergie potentielle, elle a pour expression:

$$W = A - g\alpha^2 \int \left[(\rho_1 - 1) Y_1^2 + \left(\rho_1 - \frac{3}{5}\right) Y_2^2 + \ldots\right] d\omega$$

en négligeant le cube de α. A est une constante et l'intégrale est étendue à tous les éléments $d\omega$ de la surface sphérique (Cf. RÉSAL, *Mécanique Céleste,* 1$^{\text{ère}}$ édition, p. 238).

J'ai posé pour abréger

$$1 - \rho_1 = (1 - \rho)\frac{c^3}{a^3}.$$

Cette expression de W montre qu'on a une forme d'équilibre quand tous les Y s'annulent, c'est à dire quand l'épaisseur de la couche fluide est uniforme. Les coëfficients de stabilité sont:

$$\rho_1 - 1, \ \rho_1 - \frac{3}{5}, \ldots, \rho_1 - \frac{3}{2\nu + 1}, \ldots$$

L'un d'eux s'annulera si l'on a:

$$\rho_1 = \frac{3}{2\nu + 1}$$

ν étant un entier positif. A chaque valeur de ρ_1 correspond une forme d'équilibre parfaitement définie qui est la sphère. Ces sphères forment une série linéaire de figures d'équilibre réelles. Si donc l'un des coëfficients de stabilité s'annule, c'est que la sphère correspondante est une forme d'équilibre de bifurcation.

Etudions d'un peu plus près ce qui se passe. Dans le N° 27, LAPLACE suppose que la couche fluide considérée est assujettie à conserver une figure de révolution autour de l'axe des z. Dans cette hypothèse, la fonction sphérique Y_ν se réduit au ν^e polynôme de LEGENDRE, de sorte qu'il n'y a qu'un seul coëfficient de stabilité qui soit égal à $\rho_1 - \frac{3}{2\nu + 1}$. On est ainsi ramené au cas le plus simple, celui où un seul coëfficient de stabilité s'annule et où la forme de bifurcation appartient à deux séries linéaires de formes d'équilibre réelles.

LAPLACE semble dire qu'il ne peut y avoir en général qu'une seule forme d'équilibre lorsque l'on n'a pas:

$$\rho_1 = \frac{3}{2\nu + 1}$$

et que lorsque cette relation a lieu, il y a deux formes d'équilibre, puisque αy est susceptible de deux valeurs, dont l'une est donnée par la supposition de $y = 0$, et dont l'autre est donnée par la supposition de y égal au ν^e polynôme de LEGENDRE.

Ce passage a dû paraître obscur à plus d'un lecteur. En effet LAPLACE ayant négligé les puissances supérieures de α, ce coëfficient n'intervient plus dans l'équation d'équilibre (1); il semble donc qu'on puisse le choisir arbitrairement, et alors on n'aurait plus deux figures d'équilibre, mais une infinité, qui seraient comprises dans l'équation générale:

$$y = \lambda Y_\nu$$

λ étant une constante arbitraire et Y_ν le ν^e polynôme de LEGENDRE.

Il semblerait donc que pour les valeurs de ρ_1 différentes de $\frac{3}{2\nu + 1}$, la sphère serait la seule figure d'équilibre possible, et que pour les valeurs de ρ_1 de la forme $\frac{3}{2\nu + 1}$, il y aurait une infinité de figures d'équilibre indifférent. Mais les termes de degré supérieur en α empêchent qu'il en soit ainsi.

Pour les valeurs de ρ_1 très voisines de $\frac{3}{2\nu + 1}$, il y a deux figures d'équilibre: l'une est une sphère, et l'autre est très peu différente d'une sphère. Toutes deux se confondent pour:

$$\rho_1 = \frac{3}{2\nu + 1}$$

Il y a cependant une exception; pour $\nu = 1$, on trouve $\rho_1 = 1$. La densité de la sphère solide étant alors la même que celle de la couche fluide, le sphéroïde est homogène, et l'équilibre subsistera quand la surface libre, au lieu d'être une sphère concentrique à la sphère solide, sera une sphère dont le centre sera quelconque (pourvu toutefois que les deux sphères ne se coupent pas).

L'équilibre est donc indifférent. Pour $\rho_1 = 1$, la figure formée par les deux sphères concentriques est donc encore une figure de bifurcation, mais on se trouve dans un de ces cas exceptionnels que j'ai signalés au paragraphe 2. Cette figure appartient bien encore à deux séries linéaires de formes d'équilibre. Mais il n'arrive plus, comme cela a lieu d'ordinaire, que pour chaque valeur de ρ_1 voisine de 1, on trouve dans chacune des deux séries une figure d'équilibre et une seule. Une seule des deux séries présente ce caractère; l'autre est une série de formes d'équilibre indifférent qui correspondent toutes au cas de $\rho_1 = 1$.

Dans le N° 28, LAPLACE passe au cas où la figure d'équilibre n'est plus assujettie à être de révolution. Dans ce cas il y a $2\nu + 1$ fonctions sphériques Y_ν linéairement indépendantes. Donc quand ρ_1 devient égal à $\frac{3}{2\nu+1}$, il y a $2\nu+1$ coëfficients de stabilité qui s'annulent à la fois. Donc pour les valeurs de ρ_1 très voisines de $\frac{3}{2\nu+1}$, il y a non pas deux figures d'équilibre peu différentes d'une sphère, mais un plus grand nombre. Il y en a même une infinité, si l'on tient compte de ce fait que si on a une figure d'équilibre non sphérique, l'équilibre subsiste quand on oriente cette figure d'une manière quelconque.

Je pense que ces remarques suffiront pour éclaircir ce qu'il pouvait y avoir d'obscur dans le texte de LAPLACE.

§ 7. *Stabilité de l'équilibre relatif.*

Il est très facile de trouver les conditions de stabilité de l'équilibre absolu d'un système matériel rapporté à des axes fixes; pour qu'un tel équilibre soit stable, il faut et il suffit que la fonction des forces soit maximum. Mais le problème de la stabilité de l'équilibre relatif d'un système matériel rapporté à des axes mobiles est infiniment plus compliqué. Cette théorie n'a jamais, à ma connaissance, été convenablement traitée que dans le *Treatise on Natural Philosophy* de MM. TAIT et THOMSON. Elle repose sur la distinction de la stabilité séculaire et de la stabilité ordinaire; j'en vais rappeler les principaux résultats, en donnant sur un point des compléments qui me seront utiles dans la suite.

Supposons que la position du système envisagé par rapport aux axes mobiles soit définie par n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$, choisies de telle sorte que l'équilibre ait lieu pour:

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0.$$

Si l'on dérange très peu le système de sa position d'équilibre, les valeurs de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ seront très petites et, si l'on néglige les carrés de ces quantités, les équations différentielles qui en définiront les variations seront linéaires.

On trouvera donc:

$$x_i = \sum_m A_m[i,\ m]e^{\lambda_m t}, \qquad [i = 1, 2, \ldots, n;\ m = 1, 2, \ldots, 2n].$$

Dans cette formule les A_m sont des constantes d'intégration, les $[i, m]$ et les λ_m sont des constantes qu'il est aisé de déduire des équations différentielles du problème.

Si tous les λ_m sont purement imaginaires, il y a stabilité. Si tous les λ_m ont leur partie réelle nulle ou négative, il y a encore stabilité (et ce cas peut se présenter si l'on tient compte des résistances passives, telles que la viscosité des liquides). Si enfin un des λ_m a sa partie réelle positive, il y a instabilité.

Les λ_m sont donnés par une équation algébrique de degré $2n$, de sorte que pour trouver les conditions de stabilité, il suffit de discuter cette équation en λ.

Nous supposerons que toutes les forces réelles auxquelles le système est soumis sont les actions mutuelles de ses parties, de telle sorte que le moment de la quantité de mouvement du système soit constant. Parmi ces forces réelles, nous distinguerons les forces indépendantes de la vitesse qui devront admettre une fonction des forces, et les forces dépendantes de la vitesse, c'est à dire les résistances passives dues à la viscosité. Le travail de ces dernières forces doit toujours être négatif.

Outre les forces réelles, le système sera soumis à deux sortes de forces apparentes: la force centrifuge ordinaire, indépendante de la vitesse, et la force centrifuge composée, dépendante de la vitesse; le travail de cette dernière est toujours nul.

Soit T la demi-force vive et U l'énergie potentielle due à toutes les forces indépendantes de la vitesse, y compris la force centrifuge ordinaire. Si nous négligeons, comme il convient de le faire, les puissances supérieures des x et si nous supposons que U soit nul dans la position d'équilibre, T sera une forme quadratique par rapport aux:

$$x_i' = \frac{dx_i}{dt}$$

et U une forme quadratique par rapport aux x_i.

Nous poserons selon l'usage:

$$p_i = \frac{dT}{dx_i'}$$

de sorte que les équations différentielles s'écriront:

$$\frac{dp_i}{dt} = -\frac{dU}{dx_i} + V_i, \qquad \frac{dx_i}{dt} = \frac{dT}{dp_i}.$$

Dans ces équations les V_i représentent l'ensemble des termes provenant des forces dépendantes de la vitesse. Si l'on néglige les puissances supérieures des x, les V seront linéaires par rapport aux p. Les équations différentielles seront donc linéaires.

Dans le cas de l'équilibre absolu, c'est à dire si le mouvement de rotation est nul, il faut et il suffit pour la stabilité, que la fonction des forces soit un maximum, c'est à dire que la forme quadratique U soit définie positive.

Cette condition est encore suffisante, mais elle n'est plus nécessaire, s'il y a un mouvement de rotation. Ainsi, pour parler le langage des paragraphes précédents, si tous les coëfficients de stabilité sont négatifs, il y aura certainement stabilité, même dans le cas d'un mouvement de rotation.

Dans un très grand nombre de problèmes, on peut negliger la viscosité; si dans cette hypothèse l'équilibre relatif est stable, il y aura stabilité ordinaire; si l'équilibre reste stable quand on tient compte de la viscosité, il y aura stabilité séculaire.

Il peut y avoir stabilité ordinaire sans qu'il y ait stabilité séculaire; il arrive alors, si la viscosité est très faible, ce qui est souvent le cas, que la figure du système se maintiendra pendant fort longtemps, mais finira toujours par être bouleversée.

Pour qu'il y ait stabilité séculaire, il faut et il suffit que la forme U soit définie positive, c'est à dire que tous les coëfficients de stabilité soient négatifs.

Les conditions de la stabilité ordinaire sont beaucoup plus compliquées. Bornons-nous à dire que cette stabilité ne pourra jamais avoir lieu si le nombre des coëfficients de stabilité qui sont positifs est impair.

Tels sont les résultats très précis que l'on trouve démontrés dans l'ouvrage de MM. TAIT et THOMSON. Il y a toutefois une importante restriction à faire et sur laquelle je désirerais attirer l'attention. L'argumentation de MM. TAIT et THOMSON repose tout entière sur cette hypothèse que le travail de la viscosité est toujours négatif (et non pas nul) pour tous les mouvements possibles. Il n'en est pas toujours ainsi.

Supposons par exemple une masse fluide isolée dans l'espace. Si cette masse se déplace sans se déformer, ce mouvement ne sera contrarié par aucune résistance passive analogue à la viscosité. Le travail de la viscosité sera alors nul et non pas négatif. Nous devons donc, si nous voulons appliquer le théorème de MM. Tait et Thomson, supposer qu'on a introduit dans le système des liaisons telles que la masse fluide ne puisse se déplacer sans se déformer. Si l'on fait cette hypothèse, la proposition est applicable, et l'on peut dire que les conditions de stabilité sont les mêmes si l'on tient compte *à la fois* de la viscosité et de la force centrifuge composée, ou bien si l'on néglige *à la fois* ces deux forces.

Avant de terminer ce qui concerne cette stabilité de l'équilibre relatif, je dois examiner un cas particulier. Supposons qu'à l'état de l'équilibre relatif, le système envisagé affecte une figure de révolution autour de l'axe des z. Pour simplifier l'exposition, nous supposerons qu'à l'état d'équilibre, toute la matière du système soit uniformément répartie sur n circonférences parallèles dont les rayons seront $r_1, r_2, \ldots, r_n$. Soit m une molécule appartenant au parallèle de rayon r_i. Supposons que l'on déplace cette molécule de telle façon que sa distance au plan des xy augmente de z_i, sa distance à l'axe des z augmente de u_i et qu'enfin le dièdre du plan moz avec le plan xoz augmente de $\frac{v_i}{r_i}$. Si les quantités u_i, z_i et v_i sont les mêmes pour toutes les molécules d'une même parallèle, le système affectera encore après cette déformation, une figure de révolution. Si l'on suppose de même que $\frac{du_i}{dt} = u'_i$, $\frac{dv_i}{dt} = v'_i$, $\frac{dz_i}{dt} = z'_i$ sont les mêmes pour toutes les molécules d'un même parallèle, la demi-force vive totale du système a pour valeur:

$$T = \Sigma A_i(u_i'^2 + v_i'^2 + z_i'^2)$$

$A_1, A_2, \ldots, A_n$ étant n constantes que nous regarderons comme données. Enfin l'énergie potentielle U ne dépendra que des u et des z, tant que les quantités u_i, v_i et z_i conserveront la même valeur tout le long d'un parallèle. Les équations du mouvement seront alors, en supprimant toute viscosité:

$$A_i \frac{d^2 u_i}{dt^2} = -\frac{dU}{du_i} - 2A_i\omega\frac{dv_i}{dt}$$

$$A_i \frac{d^2 v_i}{dt^2} = 2A_i\omega\frac{du_i}{dt}, \qquad A_i\frac{d^2 z_i}{dt} = -\frac{dU}{dz_i}$$

ω désignant la vitesse angulaire de rotation due au mouvement d'entraînement. Ces équations sont linéaires en u_i, v_i et z_i. On y satisfera en posant:

$$u_i = a_i \cos\lambda t, \qquad z_i = b_i \cos\lambda t, \qquad v_i = 2a_i\frac{\omega}{\lambda}\sin\lambda t$$

et une condition nécessaire pour qu'il y ait stabilité, c'est que les valeurs de λ qui permettent de satisfaire de la sorte à nos équations différentielles soient toutes réelles. On voit par ces équations que si les conditions initiales du mouvement sont telles que u_i, v_i, z_i, u'_i, v'_i, z'_i soient les mêmes tout le long d'un parallèle, il en sera encore de même au bout d'un temps quelconque et le système restera de révolution.

On pourra trouver pour λ un certain nombre de valeurs distinctes que j'appellerai $\pm\lambda_1$, $\pm\lambda_2$, ... et l'intégrale générale des équations proposées en supposant que le système reste de révolution sera:

$$(2)\qquad \begin{aligned} u_i &= \sum_p B_p a_{ip}\cos(\lambda_p t + \varepsilon_p) \\ z_i &= \sum_p B_p b_{ip}\cos(\lambda_p t + \varepsilon_p) \\ v_i &= 2\omega\sum_p B_p\frac{a_{ip}}{\lambda_p}\sin(\lambda_p t + \varepsilon_p) \end{aligned}$$

les B_p et les ε_p étant $2p$ constantes d'intégration.

Mais on doit avoir:

$$T + U = C$$

C étant une constante. Il est facile de voir que si U n'est pas une forme définie positive, on peut choisir les conditions initiales du mouvement de telle sorte que la constante C ait le signe que l'on veut. On trouve:

$$T = D_0 + \Sigma D_p \cos 2(\lambda_p t + \varepsilon_p) + \Sigma D_{pq} \cos[(\lambda_p + \lambda_q)t + \varepsilon_p + \varepsilon_q]$$
$$+ \Sigma D'_{pq} \cos(\lambda_p t - \lambda_q t + \varepsilon_p - \varepsilon_q)$$

$$U = E_0 + \Sigma E_p \cos 2(\lambda_p t + \varepsilon_p) + \Sigma(E_{pq} \text{ ou } E'_{pq}) \cos[(\lambda_p \pm \lambda_q)t + \varepsilon_p \pm \varepsilon_q].$$

On a donc:

$$D_0 + E_0 = C, \qquad D_p + E_p = 0, \qquad D_{pq} + E_{pq} = 0, \qquad D'_{pq} + E'_{pq} = 0.$$

On trouve d'ailleurs en faisant attention à la nature des formes T et U et à la forme des équations (2):

$$D_0 = \Sigma_p B_p^2 D_p$$
$$2E_0 = \Sigma_{ip} B_p^2 A_i(\lambda_p^2 a_{ip}^2 + \lambda_p^2 b_{ip}^2 + 4\omega^2 a_{ip}^2)$$
$$2E_p = - \Sigma_i A_i(\lambda_p^2 a_{ip}^2 + \lambda_p^2 b_{ip}^2 - 4\omega^2 a_{ip}^2).$$

On tire de là:

$$D_0 + E_0 - \Sigma B_p^2(D_p + E_p) = \Sigma B_p^2 A_i \lambda_p^2(a_{ip}^2 + b_{ip}^2) \tag{3}$$

et d'autre part:

$$D_0 + E_0 - \Sigma B_p^2(D_p + E_p) = C.$$

Les coëfficients A_i sont essentiellement positifs. Si donc les λ_p sont tous réels, le second membre de (3) est essentiellement positif. Mais nous avons vu que C peut devenir négatif à moins que la forme U ne soit définie positive. Si donc cette forme n'est pas définie positive (au moins tant que le système est assujetti à rester de révolution) il ne peut y avoir stabilité.

Cette démonstration se trouve, sauf la forme et les notations, dans la *Mécanique Céleste* de LAPLACE, Livre IV, Chapitre II, n° 14.

On doit donc conclure que si un système affecte, à l'état d'équilibre relatif, une figure de révolution, cet équilibre ne jouira pas même de la stabilité ordinaire, si l'équilibre du système n'est pas stable quand on supprime la force centrifuge composée et qu'on introduit des liaisons assujettissant le système à rester de révolution *autour de l'axe des z.* Il faut toutefois observer à quelle condition ce théorème de LAPLACE est applicable. Il pourrait se faire que l'un des λ fût nul et alors le raisonnement précédent tomberait de lui-même. Il pourrait y avoir encore stabilité en ce sens que la figure extérieure du système demeurerait toujours très peu différente de la figure primitive; mais les divers parallèles tendraient à tourner avec des vitesses différentes.

Il reste à examiner si les théorèmes établis dans les paragraphes précédents subsistent encore dans le cas de l'équilibre relatif. Le premier d'entre eux, d'après lequel, si un des coëfficients de stabilité change de signe quand on suit une série linéaire de figures d'équilibre, la forme correspondante est de bifurcation, subsiste évidemment, car le mouvement de rotation et la force centrifuge composée ne changent pas les conditions d'équilibre et n'ont d'influence que sur les conditions de stabilité.

Quant au second théorème, c'est à dire au principe de l'échange des stabilités, il subsiste encore en ce qui concerne la stabilité séculaire dont les conditions ne sont pas non plus changées par la force centrifuge composée.

Il subsiste même en ce qui concerne la stabilité ordinaire, mais seulement à la condition qu'un seul des coëfficients de stabilité s'annule à la fois. Nous avons vu en effet qu'il ne peut y avoir même stabilité ordinaire quand un seul coëfficient de stabilité (ou plus généralement un nombre impair de ces coëfficients) est positif et les autres négatifs.

§ 8. *Fonctions de Lamé.*

Après ces longs prolégomènes, j'arrive à l'objet principal de ce travail.

Nous nous occupons de déterminer la forme d'équilibre d'une masse fluide homogène dont toutes les molécules s'attirent d'après la loi de NEWTON et qui est animée d'un mouvement de rotation uniforme autour de l'axe des z. Si nous ne nous occupons que des conditions d'équilibre en laissant de côté la question de stabilité, nous n'avons pas à tenir compte de la force contrifuge composée, et nous pouvons traiter le problème comme s'il s'agissait de l'équilibre absolu d'une masse fluide soumise seulement à l'attraction newtonienne et à la force centrifuge ordinaire.

Nous connaissons déjà plusieurs séries linéaires réelles de figures d'équilibre, ce sont les ellipsoïdes de révolution et les ellipsoïdes de Jacobi. La figure de ces ellipsoïdes dépend de la vitesse angulaire de rotation ω qui jouera ici le même rôle que jouait le paramètre y dans les paragraphes 2, 3 et 4.

Nous pouvons, sans restreindre la généralité, imposer à notre masse fluide certaines liaisons. L'axe de révolution que nous avons pris pour axe des z, peut être regardé comme fixe. Nous regarderons également comme fixe le centre de gravité de la masse. Cela ne suffit pas encore pour notre objet; si l'on se bornait là en effet, on pourrait faire tourner l'ellipsoïde de Jacobi d'un angle quelconque autour de l'axe des z sans que l'équilibre cesse. On aurait donc pour chaque valeur de ω une infinité d'ellipsoïdes à trois axes inégaux qui satisferaient à la question. Afin d'éviter cette circonstance, qui sans pouvoir causer de véritables difficultés, nous gênerait dans l'exposition, nous assujettirons notre système à une liaison de plus, en supposant que le plan des xz soit un des trois plans principaux d'inertie. Il résultera de cette hypothèse que si un ellipsoïde à trois axes inégaux satisfait à la question, ses trois axes d'inertie seront les trois axes de coordonnées, et de plus le même ellipsoïde satisfera encore à la question quand on l'aura fait tourner de 90° autour de l'axe des z.

Dans ces conditions, voici les résultats bien connus de la discussion des équations d'équilibre.

Quand ω^2 croît depuis 0 jusqu'à $4\pi \times 0,093$, il y a quatre ellipsoïdes qui satisfont à la question, à savoir deux ellipsoïdes de révolution et deux ellipsoïdes de Jacobi. Ces deux derniers ne diffèrent l'un de l'autre que par leur position, et on passe de l'un à l'autre par une rotation de 90° autour de l'axe des z.

Pour $\omega^2 = 4\pi \times 0,093$, les deux ellipsoïdes de Jacobi se confondent entre eux et avec un des deux ellipsoïdes de révolution que nous appellerons l'ellipsoïde E.

Quand ω^2 croît de $4\pi \times 0,093$ à $4\pi \times 0,112$, il y a deux ellipsoïdes de révolution qui satisfont à la question.

Pour $\omega^2 = 4\pi \times 0,112$ les deux ellipsoïdes de révolution se confondent en un seul E'.

Pour $\omega^2 > 4\pi \times 0,112$, il n'y a plus d'ellipsoïde satisfaisant à la question.

Pour parler le langage des premiers paragraphes, il y a quatre séries linéaires de figures réelles d'équilibre depuis $\omega^2 = 0$, jusqu'à $\omega^2 = 4\pi . 0,09$; il n'y en a plus que deux depuis $\omega^2 = 4\pi . 0,09$ jusqu'à $\omega^2 = 4\pi . 0,11$, et il n'y en a plus du tout à partir de cette dernière valeur.

L'ellipsoïde E' est une forme limite puisque, en faisant croître ω^2, on voit les deux ellipsoïdes réels de révolution se confondre avec E' pour devenir ensuite imaginaires.

L'ellipsoïde E est à la fois une forme de bifurcation, (puisqu'il appartient à la fois à la série des ellipsoïdes de révolution et à la série des ellipsoïdes de Jacobi) et une forme limite, (puisque, en faisant croître ω^2, on voit les deux ellipsoïdes réels de Jacobi se confondre avec E pour devenir ensuite imaginaires.

Outre les ellipsoïdes, on sait qu'il existe des figures annulaires d'équilibre, dont nous avons parlé dans le paragraphe 5. Nous nous proposons de rechercher s'il existe en outre des séries linéaires de figures convexes d'équilibre non ellipsoïdales. Pour cela nous chercherons à reconnaître si parmi les ellipsoïdes de révolution et ceux de Jacobi, il y a des formes de bifurcation.

Pour arriver à ce résultat, il faut calculer les coëfficients de stabilité de ces ellipsoïdes et rechercher dans quels cas ils s'annulent. On verra plus loin que ces coëfficients dépendent des fonctions de Lamé, mais nous allons d'abord rappeler les résultats si remarquables des travaux de Lamé et de Liouville au sujet de ces fonctions.

Nous emploierons dans ce qui va suivre les notations de Liouville dans ses lettres à Brachet (Journal de mathématiques pures et appliquées, 1ère série, T. XI, 1846). Rappelons ces notations.

On donne à l'équation de l'ellipsoïde considéré la forme:

$$\frac{x^2}{\rho^2} + \frac{y^2}{\rho^2 - b^2} + \frac{z^2}{\rho^2 - c^2} = 1 \qquad (c^2 > b^2)$$

et on définit la position d'un point sur cet ellipsoïde par les deux autres coordonnées elliptiques μ et ν.

Une fonction de Lamé d'ordre n est une fonction R de l'une des 4 formes:

$$R = P_n, \qquad R = \sqrt{\rho^2 - b^2}P_{n-1}, \qquad R = \sqrt{\rho^2 - c^2}P_{n-1}$$

$$R = \sqrt{(\rho^2 - b^2)(\rho^2 - c^2)}P_{n-2}$$

(où P_n désigne un polynôme de degré n en ρ) et satisfaisant à l'équation différentielle:

$$(1) \quad (\rho^2 - b^2)(\rho^2 - c^2)\frac{d^2R}{d\rho^2} + (2\rho^2 - b^2 - c^2)\rho\frac{dR}{d\rho} = [n(n+1)\rho^2 - B]R$$

(B étant une constante convenablement choisie).

Avant d'aller plus loin, indiquons quelles sont les diverses formes qu'il peut être utile de donner à l'équation (1).

Nous poserons:

$$\rho_1 = \sqrt{\rho^2 - b^2}, \qquad \rho_2 = \sqrt{\rho^2 - c^2}$$

$$R = \rho T_0 = \rho_1 T_1 = \rho_2 T_2 = \rho_1\rho_2 U_0 = \rho\rho_2 U_1 = \rho\rho_1 U_2.$$

L'équation peut alors se mettre sous la forme générale:

$$(1') \qquad (\sigma^4 + p\sigma^2 + q)\frac{d^2V}{d\sigma^2} + (\alpha\sigma^2 + \beta)\sigma\frac{dV}{d\sigma} = (H\sigma^2 + K)V.$$

Dans cette équation générale, σ représente l'une des variables ρ, ρ_1 ou ρ_2, et V l'une des sept fonctions R, T ou U. On a d'ailleurs:

$$\alpha = 2, \qquad H = n(n+1), \qquad \text{si } V = R$$

$$\alpha = 4, \qquad H = n(n+1) - 2, \qquad \text{si } V = T$$

$$\alpha = 6, \qquad H = n(n+1) - 2, \qquad \text{si } V = U.$$

D'autre part:

$$p = -(b^2 + c^2), \qquad q = b^2c^2, \qquad \text{si } \sigma = \rho$$

$$p = 2b^2 - c^2, \qquad q = -b^2(c^2 - b^2), \qquad \text{si } \sigma = \rho_1$$

$$p = 2c^2 - b^2, \qquad q = c^2(c^2 - b^2), \qquad \text{si } \sigma = \rho_2.$$

D'ailleurs:

$$\beta = p, \qquad \text{si } V = R$$
$$\beta = p - 2c^2, \qquad \text{si } V = T_1, \qquad \sigma = \rho \text{ etc.}$$
$$\beta = 3p, \qquad \text{si } V = U.$$

Enfin on trouve:

$$K = -B, \qquad \text{si } V = R, \quad \sigma = \rho$$
$$K = -(B - c^2), \qquad \text{si } V = T_1, \quad \sigma = \rho$$
$$K = -(B - q), \qquad \text{si } V = U_0, \quad \sigma = \rho$$
$$K = -[B + n(n+1)b^2], \qquad \text{si } V = R, \quad \sigma = \rho_1 \text{ etc.}$$

Pour achever de définir la fonction R, nous supposerons:

$$\lim \frac{R}{\rho^n} = 1, \qquad \text{pour } \rho = \infty.$$

A chaque fonction R correspondent deux fonctions M et N que l'on obtient en changeant dans R, ρ, $\sqrt{\rho^2 - b^2}$ et $\sqrt{\rho^2 - c^2}$ en μ, $\sqrt{\mu^2 - b^2}$ et $\sqrt{c^2 - \mu^2}$, en ce qui concerne M, et en ν, $\sqrt{b^2 - \nu^2}$, $\sqrt{c^2 - \nu^2}$ en ce qui concerne N.

A chaque fonction R correspondra en outre une fonction S de ρ définie par l'équation:

$$S = (2n + 1)R \int_\rho^\infty \frac{d\rho}{R^2 \sqrt{(\rho^2 - b^2)(\rho^2 - c^2)}}$$

et satisfaisant comme R à l'équation (1).

Liouville pose de plus:

$$l = \frac{P}{\rho \sqrt{(\rho^2 - b^2)(\rho - e^2)}} = \frac{h}{\sqrt{(\rho^2 - b^2)(\rho^2 - c^2)}} = \frac{1}{\sqrt{(\rho^2 - \mu^2)(\rho^2 - \nu^2)}};$$

P est la distance du centre de l'ellipsoïde au plan tangent.

Liouville trouve ainsi les équations suivantes:

$$(2) \qquad \iint \frac{l' M' N' d\omega'}{\Delta} = \frac{4\pi RSMN}{2n + 1}.$$

Dans cette équation (2) on considère deux points de l'ellipsoïde ayant pour coordonnées elliptiques ρ, μ, ν et ρ, μ' et ν'; M, N et l sont les fonctions définies plus haut de μ et de ν; M', N' et l' sont les fonctions correspondantes de μ' et de ν'; Δ est la distance des deux points μ, ν et μ', ν'; $d\omega'$ est un élément de la surface de l'ellipsoïde ayant pour centre le point μ', ν' et l'intégrale est étendue à tous les éléments $d\omega'$ de l'ellipsoïde.

Liouville trouve encore:

$$\iint lMNM_1N_1 d\omega = 0 \tag{3}$$

où $d\omega$ est un élément de l'ellipsoïde; l, M, N, M_1 et N_1 les fonctions définies plus haut des coordonnées μ et ν du centre de cet élément. M et N sont deux fonctions de Lamé conjuguées; M_1 et N_1 sont deux autres fonctions de Lamé également conjuguées, mais qui doivent être différentes des premières.

Liouville démontre de plus que la fonction R est constamment positive et croissante quand ρ varie depuis $+c$ jusqu'à $+\infty$. Pour les valeurs $\rho = 0$, $\rho = \pm b$, $\rho = \pm c$, une des deux fonctions R ou $\frac{dR}{d\rho}\sqrt{(\rho^2 - b^2)(\rho^2 - c^2)}$ doit s'annuler.

Il me reste à parler des équations qui déterminent la constante B.

Cherchons quelle est la condition pour que l'équation (1') soit satisfaite par un polynôme de degré λ, (où $\lambda = n$, si $V = R$; ou $n - 1$ si $V = T$; ou $n - 2$ si $V = U$).

Posons à cet effet:

$$V = \sigma^\lambda + \gamma_1\sigma^{\lambda-2} + \gamma_2\sigma^{\lambda-4} + \ldots + \gamma_x\sigma^{\lambda-2x}.$$

Nous prendrons $\lambda = 2x$ si λ est pair et $\lambda = 2x + 1$ si λ est impair. Nous trouverons alors en substituant ce polynôme à la place de V dans l'équation (1') et identifiant les deux membres:

$$\begin{aligned}
&\Phi\gamma_{i+1} + (\lambda\Psi - k)\gamma_i + q\Theta\gamma_{i-1} = 0 \\
&\Phi = (\lambda - 2i - 2)(\lambda - 2i + \alpha - 3) - H \\
&\Psi = p(\lambda - 2i)\left(\lambda - 2i - 1 + \frac{\beta}{p}\right) \\
&\Theta = (\lambda - 2i + 2)(\lambda - 2i + 1)
\end{aligned} \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots, x) \tag{4}$$

L'équation (4) est une sorte de relation de récurrence qui permet de calculer de proche en proche les coëfficients γ, en partant des valeurs initiales $\gamma_0 = 1$, $\gamma_{-1} = 0$. On trouve ainsi γ_i sous la forme d'un polynôme de degré i en k. Comme on doit avoir $\gamma_{x+1} = 0$, la valeur de k (et par conséquent celle de B) se trouve donnée par une équation algébrique de degré $x + 1$.

Nous avons vu plus haut que la fonction R peut prendre l'une des quatre formes

$$R = P_n, \qquad R = \sqrt{\rho^2 - b^2}\, P_{n-1}$$

$$R = \sqrt{\rho^2 - c^2}\, P_{n-1}, \qquad R = \sqrt{(\rho^2 - b^2)(\rho^2 - c^2)}\, P_{n-2}.$$

A ces quatre formes correspondront quatre équations en B qui seront respectivement de degré

$$\frac{n}{2} + 1, \qquad \frac{n}{2}, \qquad \frac{n}{2} \quad \text{et} \quad \frac{n}{2}$$

si n est pair, et de degré

$$\frac{n+1}{2}, \qquad \frac{n+1}{2}, \qquad \frac{n+1}{2} \quad \text{et} \quad \frac{n-1}{2}$$

si n est impair et que j'appellerai pour abréger (E_1), (E_2), (E_3) et (E_4). Pour former l'une de ces quatre équations, on formera l'équation (1') de façon que la fonction V doive être un polynôme entier et on en déduira les équations (4) correspondantes. Il est à remarquer que chacune de ces quatre équations peut être ainsi construite de trois manières différentes. En effet, pour chacune de ces quatre formes de la fonction R on peut écrire l'équation (1') de trois manières différentes, selon que l'on choisit pour variable indépendante ρ, ρ_1 ou ρ_2.

Lamé a démontré que ces quatre équations (E) ont toutes leurs racines réelles. Liouville, en rappelant ce résultat, ajoute que la méthode de Sturm y aurait conduit plus rapidement. Comme il ne donne pas d'autre détail, il ne sera peut-être pas inutile d'éclaircir sa pensée par quelques explications.

Si on revient aux équations (4), on verra que le coëfficient Φ y est toujours négatif et le coëfficient Θ toujours positif. Si donc on suppose que q soit négatif, les fonctions γ_i qui sont, comme on l'a vu, des polynômes entiers de degré i en B, jouissent de la propriété caractéristique des fonctions de STURM, c'est à dire que, quand γ_i s'annule, γ_{i+1} et γ_{i-1} sont de signes contraires. On voit de plus que si le coëfficient de k^i dans γ_i est positif, le coëfficient de k^{i+1} dans γ_{i+1} sera négatif et réciproquement. On peut donc appliquer le raisonnement de STURM à la suite:

$$\gamma_{x+1}, \gamma_x, \ldots, \gamma_2, \gamma_1, \gamma_0.$$

Mais on peut toujours supposer que q est négatif; il suffit pour cela de prendre ρ_1 pour variable indépendante. C'est ainsi que la méthode de STURM est applicable aux équations qui nous occupent.

D'ailleurs, si q est négatif, et si l'on élimine les γ entre les équations (4) par le moyen d'un déterminant, l'équation (E) ainsi obtenue aura la même forme que »l'équation en S» que l'on rencontre quand on recherche les axes principaux d'une surface du 2^d^ ordre.

Voici une autre démonstration du même théorème, que je crois nouvelle et qui pourra nous être utile.

Dans le cas de $b^2 = c^2$, on a ainsi que LIOUVILLE l'a montré:

$$B = [n(n+1) - i^2]c^2 \qquad (i=0, 1, 2, \ldots, n)$$

$$R = \frac{(\rho^2 - c^2)^{\frac{i}{2}}}{2n(2n-1)\ldots(n-i+1)} \frac{d^{i+n}(\rho^2 - c^2)^n}{d\rho^{i+n}}.$$

Dans le cas de $b^2 = 0$, on a:

$$B = i^2c^2 \qquad (i=0, 1, 2, \ldots, n)$$

$$R = \frac{(\rho_2^2 + c^2)^{\frac{i}{2}}}{2n(2n-1)\ldots(n-i+1)} \frac{d^{i+n}(\rho_2^2 + c^2)}{d\rho^{i+n}}.$$

Ainsi pour $b^2 = c^2$ les racines des équations E_1 et E_4 sont:

$$n(n+1)c^2, \qquad [n(n+1) - 4]c^2, \quad \text{etc.,} \quad [n(n+1) - 4k^2]c^2, \qquad (2k \leqq n)$$

et celles des équations E_2 et E_3 sont:

$$[n(n+1) - 1]c^2, \qquad [n(n+1) - 9]c^2, \quad \text{etc.,} \quad [n(n+1) - (2k+1)^2]c^2,$$

$$(2k + 1 \leqq n).$$

Ainsi si l'on envisage seulement les équations E_1 et E_2 par exemple, les racines de ces deux équations seront toutes réelles et se sépareront mutuellement.

Faisons varier b^2 d'une manière continue depuis sa limite supérieure c^2 jusqu'à sa limite inférieure o. Les racines des deux équations E_1 et E_2 varieront d'une manière continue. Pour qu'elles cessassent d'être toutes réelles, il faudrait que deux racines de E_1 ou deux racines de E_2 devinssent égales. Mais pour que cela fût possible, il faudrait d'abord que les racines des deux équations cessassent de se séparer mutuellement. Pour qu'elles cessassent de se séparer, il faudrait que l'une des racines de E_1 devînt égale à une des racines de E_2.

Or je dis que cela est impossible. Soit en effet B une racine que nous supposons appartenir à la fois à E_1 et à E_2 et envisageons l'équation (1) correspondante.

Cette équation admettra deux intégrales, l'une de la forme P_n, l'autre de la forme $\sqrt{\rho^2 - c^2}P_{n-1}$. Soient R et R_1 ces deux intégrales. On peut former une équation linéaire du 3e ordre, à coëfficients rationnels et admettant pour intégrales les carrés des intégrales de (1). Un système fondamental d'intégrales sera:

$$R^2, \; RR_1 \text{ et } R_1^2.$$

Cette équation admettrait donc comme intégrales deux polynômes entiers R^2 et R_1^2 *essentiellement distincts.*

Mais l'équation (1) admet, outre l'intégrale R, l'intégrale S définie plus haut et qui est telle que:

$$\lim S\rho^{n+1} = 1, \qquad \text{pour } \rho = \infty.$$

L'équation du 3me ordre dont nous venons de parler admettra donc comme système fondamental d'intégrales:

$$R^2, \qquad RS, \qquad S^2.$$

Si nous convenons de dire qu'une fonction F de ρ est de degré p en ρ si le rapport de F à ρ^p tend vers une limite finie quand ρ croît indéfiniment, il résulte de ce qui précède que les trois intégrales R^2, RS et S^2 sont respectivement de degré $2n$, -1 et $-(2n+2)$. Une intégrale quelconque de l'équation du 3^{me} ordre sera une combinaison linéaire de R^2, RS et S^2; elle sera donc, à moins d'être identiquement nulle, de l'un des trois degrés $2n$, -1 et $-(2n+2)$.

Or $R^2 - R_1^2$ qui est une de ces intégrales, ne peut être ni de degré -1, ni de degré $-(2n+2)$ puisque c'est un polynôme entier; ni de degré $2n$, puisque le premier terme de R^2 est ρ^{2n} de même que le premier terme de R_1^2, de sorte que les termes de degré $2n$ disparaissent dans $R^2 - R_1^2$. Il faut donc que:

$$R^2 - R_1^2 = 0$$

ou

$$R = R_1$$

ce qui est impossible et contraire aux hypothèses faites plus haut. Nous devons donc conclure que les racines des équations E_1 et E_2 sont toutes réelles et se séparent mutuellement, quelle que soit la valeur de b^2.

Cela va nous permettre de distinguer les unes des autres les diverses fonctions R.

Nous écrirons:

$$R_{n,i}^{(k)}.$$

L'indice supérieur k sera égal à 1, 2, 3 ou 4 selon que R sera de la forme

$$P_n, \quad \text{ou} \quad \sqrt{\rho^2 - b^2}\,P_{n-1}, \quad \text{ou} \quad \sqrt{\rho^2 - c^2}\,P_{n-1}, \quad \text{ou} \quad \sqrt{(\rho^2 - b^2)(\rho^2 - c^2)}\,P_{n-2}.$$

L'indice n indiquera le degré de la fonction R, enfin l'indice i devra être choisi de telle sorte que $R_{n,i}$ se réduise à:

$$A(\rho^2 - c^2)^{\frac{i}{2}} D^{i+n} (\rho^2 - c^2)^n$$

pour $b^2 = c^2$, A désignant un coëfficient constant dont on trouvera plus haut la valeur, et le signe D^{i+n} exprimant qu'on doit effectuer $i+n$ différentiations par rapport à ρ.

On voit aisément d'après ce qui précède que la fonction $R_{n,i}^{(k)}$ est parfaitement déterminée. Pour $b^2 = 0$ on trouve:

$$R_{n,i}^{(k)} = A(\rho_2^2 + c^2)^{\frac{j}{2}} D^{j+n} (\rho_2^2 + c^2)^n$$

où j a une valeur que nous allons déterminer.

On voit aisément que i est pair si $k = 1$ ou 4 et impair si $k = 2$ ou 3; tandis que j est de même parité que n, si $k = 1$ où 2 et de parité différente si $k = 3$ ou 4. De plus, pour une même valeur de k, les valeurs de j devront croître quand celles de i décroîtront. On a donc:

$$\text{si } k = 1 \text{ ou } 3, \qquad i + j = n$$

$$\text{si } k = 2 \text{ ou } 4, \qquad i + j = n + 1.$$

Nous pouvons déduire de là quelques propriétés des fonctions R. Combien l'équation:

$$R^{(k)}_{n,i} = 0 \tag{5}$$

(où le premier membre est supposé débarrassé du facteur radical $\sqrt{\rho^2 - b^2}$, $\sqrt{\rho^2 - c^2}$ et $\sqrt{(\rho^2 - b^2)(\rho^2 - c^2)}$, qu'il pourrait contenir, ainsi que du facteur ρ s'il y a lieu) aura-t-elle de racines réelles et comment ces racines seront elles distribuées? Nous prendrons pour inconnue ρ^2 et non pas ρ. Faisons d'abord $b^2 = c^2$. On verra que l'équation admettra ξ racines égales à c^2 et η racines comprises entre 0 et c^2.

Si nous faisons ensuite $b^2 = 0$, on verra que l'équation admettra ξ' racines égales à 0 et η' comprises entre 0 et c^2.

Les valeurs des nombres ξ, η, ξ' et η' nous seront données par le tableau suivant, où la première colonne donne la valeur de k, la seconde le reste de n à 2 et les quatre autres les valeurs des quatre nombres: $i - 2\xi$, $n - i - 2\eta$, $j - 2\xi'$, $n - j - 2\eta'$.

1	0	0	0	0	0
1	1	0	1	1	0
2	0	1	1	2	0
2	1	1	0	1	0
3	0	1	1	1	1
3	1	1	0	0	1
4	0	2	0	1	1
4	1	2	1	2	1

Ce tableau montre que l'on a toujours:

$$\xi = \eta', \qquad \xi' = \eta.$$

Qu'arrive-t-il maintenant pour les valeurs de b^2 comprises entre o et c^2? Pour une pareille valeur, l'équation ne peut avoir de racine multiple, car si pour une certaine valeur de ρ, R et $\frac{dR}{d\rho}$ s'annulaient à la fois, le coëfficient de $\frac{d^2R}{d\rho^2}$ dans l'équation (1) devrait être nul également, ce qui entraînerait:

$$\rho^2 = b^2 \quad \text{ou} \quad c^2.$$

D'autre part aucune des racines de l'équation ne peut être égale à o, à b^2 ou à c^2; car si l'on forme l'équation déterminante de l'équation (1) pour les points $\rho = \pm b$, $\rho = \pm c$, on trouve que les racines de cette équation déterminante sont o et $\frac{1}{2}$. D'ailleurs, comme on a supposé qu'on enlevait dans l'équation (5) le facteur ρ s'il s'y trouvait, il ne pourrait arriver qu'il y restât ensuite, que s'il y entrait au carré avant qu'on ne l'eût enlevé. Or nous venons de voir que cela ne peut être.

On doit donc conclure que lorsque b^2 décroît depuis c^2 jusqu'à o, l'équation (5) aura ξ_1 racines réelles entre o et b^2 et η_1 racines réelles entre b^2 et c^2 et que ces deux nombres ξ_1 et η_1 demeureront invariables.

Pour $b^2 = c^2$, il arrivera que les η_1 racines comprises entre b^2 et c^2 deviendront égales à c^2; on pourrait supposer aussi qu'un certain nombre de racines d'abord imaginaires, ou non comprises entre b^2 et c^2 tendent aussi vers c^2 quand b^2 tend vers c^2, de sorte qu'on aura:

$$\eta_1 \leqq \xi.$$

Quant aux ξ_1 racines comprises entre o et b^2, elles resteront comprises entre o et c^2; on pourrait supposer toutefois que quelques unes d'entre elles se réduisent à c^2; on aura donc

$$\xi_1 \geqq \eta.$$

Supposons maintenant que b^2 tende vers o; il arrivera que les ξ_1 racines et peut-être d'autres tendront vers o, et que les η_1 racines, comprises entre ces mêmes limites, quelques unes d'entre elles pouvant se réduire à o. On aura donc:

$$\xi_1 \leqq \xi', \qquad \eta_1 \geqq \eta'.$$

Mais si d'autre part on observe que l'on a

$$\xi = \eta', \qquad \xi' = \eta$$

on verra qu'on doit avoir constamment

$$\eta_1 = \xi = \eta', \qquad \xi_1 = \xi' = \eta.$$

Il en résulte que l'équation (5) a toujours toutes ses racines réelles et comprises entre o et c^2; quant au nombre de racines comprises entre o et b^2, ou entre b^2 et c^2, il est donné par le tableau précédent.

Si par exemple n est pair, l'équation

$$R_{n,i}^{(1)} = 0$$

aura $\frac{n-i}{2}$ racines comprises entre o et b^2 et $\frac{i}{2}$ comprises entre b^2 et c^2.[1]

Je ne veux pas, pour le moment du moins, m'étendre plus longtemps sur les propriétés générales des fonctions de LAMÉ; je me bornerai à rappeler les deux résultats suivants qui sont bien connus.

En premier lieu, B est toujours compris entre o et $n(n+1)c^2$.

En second lieu, une fonction quelconque de μ et de ν, pour les valeurs de ν comprises entre o et b^2 et pour celles de μ comprises entre b^2 et c^2, peut toujours être développée en une série de la forme:

$$\Sigma A_i M_i N_i$$

où A_i désigne un coëfficient constant, pendant que M_i et N_i désignent deux fonctions de LAMÉ conjuguées de μ et de ν.

§ 9. *Détermination des coëfficients de stabilité.*

Considérons un ellipsoïde fluide et homogène en équilibre sous l'action de l'attraction newtonienne et de la force centrifuge. Supposons qu'il

---

[1] Ces résultats ont été donnés par M. KLEIN, qui y a été conduit par des considérations un peu différentes.

subsiste une déformation infiniment petite, sans que son volume change et cherchons à évaluer le travail des forces qui agissent sur le corps pendant cette déformation infiniment petite. Soit:

$$\frac{x^2}{\rho^2}+\frac{y^2}{\rho^2-b^2}+\frac{z^2}{\rho^2-c^2}=1$$

l'ellipsoïde envisagé et soient μ et ν les coordonnées elliptiques qui définissent la position d'un point sur cette surface. Soit ζ la distance de l'ellipsoïde à la surface déformée comptée sur la normale à l'ellipsoïde; soit g la résultante de l'attraction et de la force centrifuge en un point de la surface de l'ellipsoïde à l'état d'équilibre; cette résultante est comme on sait normale à l'ellipsoïde. Soit enfin $d\omega$ un élément quelconque de la surface de l'ellipsoïde. Pendant la déformation, une molécule quelconque peut être regardée comme soumise à trois forces: à l'attraction de l'ellipsoïde supposé fixe, à l'attraction du bourrelet infinitésimal formé par la différence entre la surface déformée et l'ellipsoïde, et à la force centrifuge. Si nous considérons un point matériel quelconque de masse 1 et que nous appelions Δ sa distance à un élément quelconque dm' de la masse de l'ellipsoïde et r sa distance à l'axe des z; si nous posons: [1]

$$V=\int\frac{dm'}{\Delta}+\frac{\omega^2 r^2}{2}$$

la variation de V mesurera précisément le travail des forces agissant sur ce point matériel et dues à l'attraction de l'ellipsoïde et à la force centrifuge, en laissant de côté l'attraction du bourrelet dont nous venons de parler.

Il résulte des hypothèses faites, que sur toute la surface de l'ellipsoïde, la fonction V a une valeur constante que nous appellerons V_0. Si au lieu d'un point situé sur l'ellipsoïde, nous envisageons un point M infiniment voisin de cette surface, nous abaisserons du point M sur l'ellipsoïde une normale MM' de longueur infiniment petite λ. La valeur de la

[1] On remarquera que je désigne par ω la vitesse de rotation et par $d\omega$ un élément de l'ellipsoïde; par μ une des coordonnées elliptiques et par $d\mu$ un élément du bourrelet. Il n'en peut résulter aucune confusion, puisque les différentielles de ω et de μ n'entrent pas dans le calcul.

fonction g au point M_1 sera précisément aussi la valeur de la dérivée de la fonction V, estimée suivant la normale. On aura donc au point M, en négligeant les infiniment petits du 2[d] ordre

$$V = V_0 - g\lambda.$$

Quelle est maintenant l'énergie potentielle totale de la masse fluide déformée? L'énergie due à l'attraction seule aura pour expression

$$\frac{1}{2}\iint \frac{dm\,dm'}{\Delta}$$

dm et dm' étant deux éléments quelconques de la masse fluide et Δ la distance de ces deux éléments. L'énergie due à la force centrifuge sera:

$$\int \frac{\omega^2}{2} r^2 dm$$

r étant la distance de l'élément dm à l'axe des z. Le double de l'énergie potentielle totale sera donc:

$$2W = \iint \frac{dm\,dm'}{\Delta} + \int \omega^2 r^2 dm.$$

J'appellerai W_0 la valeur de W dans l'état d'équilibre, c'est à dire quand la figure de la masse fluide se réduit à l'ellipsoïde.

Mais nous devons distinguer parmi les éléments de la masse fluide, les éléments de l'ellipsoïde que j'appellerai dm et dm', et les éléments du bourrelet que j'appellerai $d\mu$ et $d\mu'$. Parmi ces éléments, il y en aura de négatifs, puisque, le volume ne changeant pas pendant la déformation, on doit avoir:

$$\int d\mu = 0.$$

On a donc

$$2W = \iint \frac{dm\,dm'}{\Delta} + \iint \frac{dm\,d\mu'}{\Delta} + \iint \frac{dm'\,d\mu}{\Delta} + \iint \frac{d\mu\,d\mu'}{\Delta}$$
$$+ \int \omega^2 r^2 dm + \int \omega^2 r^2 d\mu$$

$$2W_0 = \iint \frac{dm\,dm'}{\Delta} + \int \omega^2 r^2 dm$$

ce qui peut s'écrire:

$$2W = 2W_0 + 2\iint \frac{dm'd\mu}{\Delta} + \int \omega^2 r^2 d\mu + \iint \frac{d\mu d\mu'}{\Delta}$$

ou puisque:

$$V = \int \frac{dm'}{\Delta} + \frac{\omega^2 r^2}{2}$$

on aura:

$$2W = 2W_0 + 2\int V d\mu + \iint \frac{d\mu d\mu'}{\Delta}.$$

Considérons un élément quelconque $d\omega$ de la surface de l'ellipsoïde. Menons par les divers points de cet élément des normales à l'ellipsoïde. Nous aurons ainsi déterminé une sorte de cylindre infiniment délié et dans lequel nous découperons une tranche infiniment mince en le coupant par deux plans situés à des distances λ et $\lambda + d\lambda$ du centre de l'élément $d\omega$ et parallèles au plan de cet élément. Si λ est compris entre o et ζ, la tranche ainsi découpée dans ce cylindre appartiendra à notre bourrelet; ce sera un de nos éléments $d\mu$, de sorte que nous pourrons écrire:

$$d\mu = d\lambda d\omega.$$

Nous écrirons de même:

$$d\mu' = d\lambda' d\omega'.$$

Nous aurons donc pour trouver l'expression de W à calculer les deux intégrales:

$$\int V d\lambda d\omega \qquad \text{et} \qquad \iint \frac{d\lambda d\omega\, d\lambda' d\omega'}{\Delta}.$$

Mais λ étant très petit, on a comme on a vu

$$V = V_0 - g\lambda$$

ce qui donne pour la première intégrale:

$$\int V_0 d\mu - \int g\lambda d\lambda d\omega.$$

Le premier terme est nul; le second peut s'écrire

$$-\int g d\omega \int_0^\zeta \lambda d\lambda$$

ou bien:

$$-\int g \frac{\zeta^2}{2} d\omega.$$

Il reste à calculer la seconde intégrale. Nous remarquerons que λ et λ' étant très petits, on peut considérer Δ comme représentant non pas la distance des éléments $d\mu$ et $d\mu'$, mais celle des éléments $d\omega$ et $d\omega'$ qui en diffère très peu. Δ est alors indépendant de λ et de λ' et l'on peut écrire:

$$\iint \frac{d\mu d\mu'}{\Delta} = \iint \frac{d\omega d\omega'}{\Delta} \int_0^\zeta d\lambda \int_0^{\zeta'} d\lambda' = \iint \frac{d\omega d\omega' \zeta\zeta'}{\Delta}.$$

Il reste donc finalement:

$$W = W_0 - \frac{1}{2}\int g\zeta^2 d\omega + \frac{1}{2}\iint \frac{d\omega d\omega' \zeta\zeta'}{\Delta}.$$

Avant d'aller plus loin, il faut calculer g. La force g peut être décomposée en trois composantes dirigées suivant les trois axes des x, des y et des z. La composante parallèle à l'axe des x par exemple, est parallèle à la coordonnée x du point d'application. De même pour les deux autres composantes.

Si donc on appelle α, β, γ les cosinus directeurs de la normale et k, k', k'' trois constantes, on aura:

$$g\alpha = kx, \qquad g\beta = k'y, \qquad g\gamma = k''z.$$

Mais l'équation de l'ellipsoïde est

$$\frac{x^2}{\rho^2} + \frac{y^2}{\rho^2 - b^2} + \frac{z^2}{\rho^2 - c^2} = 1$$

ce qui donne:

$$\alpha = \frac{x}{\rho^2} P, \qquad \beta = \frac{y}{\rho^2 - b^2} P, \qquad \gamma = \frac{z}{\rho^2 - c^2} P,$$

$$P = \frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{\rho^4} + \frac{y^2}{(\rho^2 - b^2)^2} + \frac{z^2}{(\rho^2 - c^2)^2}}}.$$

On a donc:

$$g = \frac{k\rho^2}{P} = \frac{k'(\rho^2 - b^2)}{P} = \frac{k''(\rho^2 - c^2)}{P}.$$

Si nous reprenons les notations du paragraphe précédent et que nous écrivions:

$$l = \frac{P}{\rho\sqrt{(\rho^2 - b^2)(\rho^2 - c^2)}}$$

il viendra

$$g = \frac{K}{l}$$

K étant une nouvelle constante ne dépendant que de ρ, b et c.

Il reste à déterminer cette constante. Pour cela il suffit de calculer l'expression de g à l'extrémité de l'axe des z; dans ce cas, g se réduit à l'attraction de l'ellipsoïde et peut s'écrire:

$$4\pi\rho\sqrt{\rho^2 - b^2}\sqrt{\rho^2 - c^2}\int_0^1 \frac{u^2 du}{\sqrt{[\rho^2 - c^2 + (c^2 - b^2)u^2][\rho^2 - c^2 + c^2u^2]}}.$$

D'ailleurs on trouve aisément:

$$l = \frac{1}{\sqrt{\rho^2(\rho^2 - b^2)}}.$$

Il vient donc, par une transformation simple de l'intégrale:

$$gl = 4\pi(\rho^2 - c^2)\int_\rho^\infty \frac{dt}{(t^2 - c^2)\sqrt{(t^2 - b^2)(t^2 - c^2)}}.$$

La fonction $\sqrt{\rho^2 - c^2}$ est une fonction de LAMÉ que nous appellerons R_1; c'est d'ailleurs la fonction que nous avions désignée dans le paragraphe précédent par la notation plus compliquée:

$$R_{1,1}^{(3)}.$$

Nous chercherons à éviter les triples indices toutes les fois qu'ils ne seront pas nécessaires et nous rangerons les fonctions de LAMÉ dans un ordre quelconque; nous les appellerons:

$$R_1, \ R_2, \ \ldots, \ R_i, \ \ldots$$

Nous poserons donc:

$$R_1 = \sqrt{\rho^2 - c^2}.$$

Si d'autre part, nous envisageons la fonction S_1 conjuguée de R_1, nous aurons:

$$S_1 = 3\sqrt{\rho^2 - c^2} \int_\rho^\infty \frac{dt}{(t^2 - c^2)\sqrt{(t^2 - b^2)(t^2 - c^2)}}.$$

On a donc à l'extrémité de l'axe des z

$$gl = \frac{4}{3}\pi R_1 S_1$$

et comme nous avons vu plus haut que gl est une constante, nous pourrons conclure que gl conserve cette valeur sur toute la surface de l'ellipsoïde.

Développons maintenant $\frac{\zeta}{l}$ qui est une fonction de μ et de ν en une série convergente de la forme suivante:

$$\Sigma A_i M_i N_i$$

A_i étant des constantes et M_i, N_i des fonctions de LAMÉ. Cela est toujours possible, comme nous l'avons dit à la fin du paragraphe précédent. Nous aurons donc:

$$\zeta = \Sigma A_i l M_i N_i$$

et de même:

$$\zeta' = \Sigma A_i l' M_i' N_i'$$

On tire de là:

$$\frac{\zeta^2}{2} = \sum \frac{A_i^2}{2} l^2 M_i^2 N_i^2 + \sum A_i A_k l^2 M_i N_i M_k N_k$$

ou:

$$\int g \frac{\zeta^2}{2} d\omega = \sum \frac{A_i^2}{2} \int g l^2 d\omega \times M_i^2 N_i^2 + \sum A_i A_k \int g l^2 d\omega M_i N_i M_k N_k$$

ou:

$$\int g \frac{\zeta^2}{2} d\omega = \sum \frac{4A_i^2}{6} \pi R_1 S_1 \int l M_i^2 N_i^2 d\omega + \sum A_i A_k \frac{4}{3} \pi R_1 S_1 \int l M_i N_i M_k N_k d\omega.$$

Si l'on observe que:

$$\int l M_i N_i M_k N_k d\omega = 0$$

il reste:

$$\int g \frac{\zeta^2}{2} d\omega = \frac{4}{6} \pi R_1 S_1 \sum A_i^2 \int l M_i^2 N_i^2 d\omega.$$

On trouve d'autre part:

$$\iint \frac{\zeta\zeta' d\omega d\omega'}{\Delta} = \sum A_i A_k \iint \frac{l l' M_i N_i M'_k N'_k d\omega d\omega'}{\Delta}$$

les deux indices i et k pouvant être égaux ou différents. Mais on a:

$$\int \frac{l' M'_k N'_k d\omega'}{\Delta} = \frac{4\pi R_k S_k M_k N_k}{2n+1}.$$

On a donc

$$\iint \frac{\zeta\zeta' d\omega d\omega'}{\Delta} = \sum A_i A_k \int l M_i N_i M_k N_k d\omega \times \frac{4\pi R_k S_k}{2n+1}.$$

Si i est différent de k, on aura:

$$\int l M_i N_i M_k N_k d\omega = 0.$$

Il reste donc:

$$\iint \frac{\zeta\zeta' d\omega d\omega'}{\Delta} = \sum A_i^2 \int l M_i^2 N_i^2 d\omega \times \frac{4\pi R_i S_i}{2n+1}.$$

On arrive donc finalement à l'expression suivante pour W:

$$W = W_0 - \frac{4\pi}{2} \sum A_i^2 \int \left(\frac{R_1 S_1}{3} - \frac{R_i S_i}{2n + 1} \right) l M_i^2 N_i^2 d\omega;$$

n est bien entendu le degré de la fonction de LAMÉ R_i.

Nous pouvons considérer la forme de la surface déformée comme définie par les coëfficients A_i. Les coëfficients de stabilité seront alors:

$$-4\pi \int \left(\frac{R_1 S_1}{3} - \frac{R_i S_i}{2n + 1} \right) l M_i^2 N_i^2 d\omega.$$

Pour qu'un des ellipsoïdes puisse être une forme de bifurcation, il faut que l'un de ces coëfficients s'annule, c'est à dire que l'on ait:

$$\frac{R_1 S_1}{3} - \frac{R_i S_i}{2n + 1} = 0$$

pour l'une des fonctions R_i.

D'après cela, il y a un des coëfficients qui est toujours nul, c'est celui qui correspond à $i = 1$. Cela était aisé à prévoir. En effet on peut déplacer l'ellipsoïde parallèlement à lui-même et parallèlement à l'axe de révolution sans changer l'état d'équilibre. Si l'on imprime ainsi à l'ellipsoïde un mouvement de translation infiniment petit et parallèle à l'axe des z, et si l'on appelle ζ la distance des deux ellipsoïdes infiniment voisins comptée suivant la normale, on a en négligeant les infiniment petits du 2^d ordre:

$$\zeta = A_1 l M_1 N_1$$

A_1 étant une constante. Comme les deux ellipsoïdes sont des surfaces d'équilibre, il faut donc bien que le coëfficient de stabilité qui correspond à $i = 1$ s'annule. Y a-t-il des cas où d'autres coëfficients de stabilité s'annulent? c'est ce que nous examinerons dans les paragraphes suivants.

On peut arriver à l'équation (1) par une autre voie un peu plus simple et que j'aurais même préférée si je ne me réservais d'examiner plus loin la question de stabilité.

Supposons que l'on ajoute à l'attraction newtonienne et à la force centrifuge qui agissent sur la masse fluide, des forces perturbatrices quelconques, mais très petites. La masse fluide prendra alors une forme d'équilibre très peu différente de l'ellipsoïde. Cette forme sera unique si aucun des coëfficients de stabilité ne s'annule; elle sera mal déterminée en général, si l'un de ces coëfficients est nul.

Nous reprendrons les mêmes notations que plus haut et nous définirons la surface d'équilibre déformée par la valeur de ζ que nous développerons en série comme précédemment:

$$\zeta = \Sigma A_i l M_i N_i$$

les A_i étant des coëfficients infiniment petits qu'il s'agit de déterminer pour définir la nouvelle forme d'équilibre. Soit comme plus haut V le potentiel dû à l'attraction de l'ellipsoïde et à la force centrifuge, v le potentiel dû à l'attraction du bourrelet, v' le potentiel dû aux forces perturbatrices. On devra avoir sur toute la nouvelle surface d'équilibre:

$$V + v + v' = \text{const.} \tag{2}$$

Mais on a, puisque ζ est infiniment petit:

$$V = V_0 - g\zeta$$

et de plus:

$$v = \int \frac{\zeta' d\omega'}{\Delta}$$

Δ étant la distance d'un point quelconque du bourrelet au point envisagé de la nouvelle surface libre; mais comme ζ est infiniment petit, on peut remplacer ces deux points par leurs projections sur l'ellipsoïde. Δ est alors la distance de deux points de l'ellipsoïde et on a:

$$v = \sum A_i \int \frac{l' M'_i N'_i d\omega'}{\Delta} = 4\pi \sum \frac{A_i R_i S_i M_i N_i}{2n + 1}.$$

Nous pouvons écrire d'ailleurs:

$$v' = \Sigma B_i M_i N_i$$

les B_i étant des coëfficients très petits que l'on peut regarder comme donnés. L'équation (2) pourra alors s'écrire, en remplaçant g et ζ par leurs valeurs:

$$-\frac{4\pi}{3}R_1 S_1 \Sigma A_i M_i N_i + 4\pi \sum \frac{A_i R_i S_i M_i N_i}{2n+1} + \Sigma B_i M_i N_i = \text{const.}$$

Nous identifierons dans les deux membres les coëfficients de $M_i N_i$ et il viendra:

$$4\pi A_i\left(\frac{R_1 S_1}{3} - \frac{R_i S_i}{2n+1}\right) = B_i.$$

Ces équations détermineront complètement les coëfficients A_i et par conséquent la nouvelle forme d'équilibre, à moins qu'on n'ait:

$$\text{(1)} \qquad \frac{R_1 S_1}{3} - \frac{R_i S_i}{2n+1} = 0.$$

C'est donc là aussi la condition pour que l'un des coëfficients de stabilité s'annule.

§ 10. *Discussion de l'équation fondamentale.*

Nous avons maintenant à rechercher si l'équation

$$\text{(1)} \qquad \frac{R_1 S_1}{3} - \frac{R_i S_i}{2n+1} = 0$$

où ρ^2 est l'inconnue admet des racines comprises entre $+c^2$ et $+\infty$.

Parlons d'abord de l'équation plus générale:

$$\text{(2)} \qquad F = \frac{R_k S_k}{2m+1} - \frac{R_i S_i}{2n+1} = 0$$

n et m étant les degrés des fonctions R_i et R_k. Le premier membre F tend vers 0 quand ρ croît indéfiniment, car les fonctions $R_k S_k$ et $R_i S_i$ sont de degré -1 en ρ, comme on l'a vu dans le paragraphe précédent. Si R_k et R_i contiennent en facteur $\sqrt{\rho^2 - c^2}$, F s'annule encore pour $\rho^2 = c^2$.

On a d'ailleurs:

$$\frac{F}{R_k^2} = \frac{S_k}{R_k}\frac{1}{2m+1} - \frac{R_i^2}{R_k^2}\frac{S_i}{R_i}\frac{1}{2n+1}.$$

Les racines de l'équation:

$$\frac{F}{R_k^2} = 0 \tag{3}$$

qui sont supérieures à c^2 sont les mêmes que celles de l'équation (2); en effet R_k peut s'annuler pour $\rho^2 = c^2$, mais jamais pour $\rho^2 > c^2$.

Si nous voulons séparer les racines de l'équation (3), il suffit d'appliquer le théorème de Rolle et d'écrire que la dérivée du premier membre de (3) est nulle. On obtient ainsi l'équation:

$$\frac{d}{d\rho}\frac{S_k}{(2m+1)R_k} - \frac{R_i^2}{R_k^2}\frac{d}{d\rho}\frac{S_i}{(2n+1)R_i} - \frac{S_i}{(2n+1)R_i}\frac{d}{d\rho}\frac{R_i^2}{R_k^2} = 0.$$

Mais on a, d'après la définition même des fonctions S:

$$\frac{d}{d\rho}\frac{S_k}{(2m+1)R_k} = \frac{-1}{R_k^2\sqrt{(\rho^2-b^2)(\rho^2-c^2)}}$$

$$\frac{d}{d\rho}\frac{S_i}{(2n+1)R_i} = \frac{-1}{R_i^2\sqrt{(\rho^2-b^2)(\rho^2-c^2)}}.$$

Il reste donc:

$$\frac{S_i}{(2n+1)R_i}\frac{d}{d\rho}\frac{R_i^2}{R_k^2} = 0$$

ce qui exprime que le rapport $\frac{R_i}{R_k}$ passe par un maximum ou minimum, car S_i ne peut s'annuler.

Nous pouvons donc énoncer le résultat suivant:

Les racines de l'équation (2) supérieures à c^2, en laissant de côté la racine c^2 si elle existe, sont séparées par les racines de l'équation:

$$\frac{d}{d\rho}\frac{R_i^2}{R_k^2} = 0$$

ce qui peut encore s'écrire:

$$R_i' R_k - R_k' R_i = 0 \tag{4}$$

où

$$R_i' = \frac{dR_i}{d\varepsilon}, \qquad \varepsilon = \int\limits_\rho^\infty \frac{d\rho}{\sqrt{(\rho^2 - b^2)(\rho^2 - c^2)}}.$$

Cherchons maintenant à séparer les racines de l'équation (4) elle-même. Pour cela annulons la dérivée du 1^er^ membre par rapport à ε. Il viendra:

$$R_i'' R_k - R_k'' R_i = 0 \tag{5}$$

où

$$R_i'' = \frac{d^2 R_i}{d\varepsilon^2}.$$

Mais l'équation (1) du paragraphe 8 peut s'écrire:

$$R_i'' = [n(n+1)\rho^2 - B_i] R_i$$

en ce qui concerne R_i, et

$$R_k'' = [m(m+1)\rho^2 - B_k] R_k$$

en ce qui concerne R_k. L'équation (5) devient ainsi, en supprimant le facteur $R_i R_k$ qui ne peut s'annuler pour les valeurs supérieures à c^2:

$$[n(n+1) - m(m+1)]\rho^2 - B_i + B_k = 0. \tag{6}$$

Il est clair qu'une pareille équation ne peut avoir qu'une racine supérieure à c^2. L'équation (4) aura donc au plus deux racines égales ou supérieures à c^2, et l'équation (2) aura au plus trois racines supérieures à c^2 (sans y comprendre la racine c^2 si elle existe, mais en y comprenant la racine ∞).

Si l'équation (4) n'a aucune racine supérieure à c^2, le rapport $\frac{R_i}{R_k}$ est toujours croissant ou toujours décroissant quand ρ^2 croît de c^2 à ∞.

Supposons par exemple qu'il soit toujours croissant. On aura alors:

$$\frac{d}{d\rho}\frac{R_i^2}{R_k^2} > 0$$

d'où:

$$\frac{d}{d\rho}\frac{F}{R_k^2} < 0$$

l'expression $\frac{F}{R_k^2}$ est donc toujours décroissante et comme elle tend vers 0 pour $\rho = \infty$, elle doit toujours être positive. On a donc:

$$F > 0.$$

Revenons en particulier à l'équation (1) et supposons:

$$R_k = R_1 = \sqrt{\rho^2 - c^2}.$$

Supposons d'abord que R_i contienne en facteur $\sqrt{\rho^2 - c^2}$, nous pourrons écrire:

$$R_i = \varphi \, . \, P_i \, . \, \sqrt{\rho^2 - c^2}$$

φ étant un facteur qui pourra être

$$\rho, \qquad \rho\sqrt{\rho^2 - b^2} \quad \text{ou} \quad \sqrt{\rho^2 - b^2}$$

et P_i étant un polynôme entier en ρ^2. L'équation:

$$P_i = 0$$

n'est autre chose que l'équation (5) du paragraphe 8, débarrassée des facteurs que nous sommes convenus de lui enlever. Nous avons vu que cette équation a toutes ses racines réelles et qu'elles sont comprises entre 0 et c^2. L'équation

$$\frac{dP_i}{d(\rho^2)} = 0$$

aura donc aussi toutes ses racines réelles et comprises entre 0 et c^2; d'où il résulte que, ρ^2 croissant de c^2 à $+\infty$, P_i sera constamment croissant. Il en est de même de ρ et de $\sqrt{\rho^2 - b^2}$ et par conséquent de φ et de

$$\frac{R_i}{R_k} = \varphi \, . \, P_i.$$

Il en résulte que si R_i contient $\sqrt{\rho^2 - c^2}$ en facteur, l'équation (1) n'a aucune racine supérieure à c^2 et que son premier membre est toujours positif.

Supposons maintenant que R_i ne contienne pas $\sqrt{\rho^2 - c^2}$ en facteur. Quand ρ est très grand, on peut regarder $\frac{1}{\rho}$ comme un infiniment petit du 1^er^ ordre. On a alors en négligeant les infiniment petits du 2^d^ ordre:

$$R_1 S_1 = R_i S_i = \frac{1}{\rho}$$

d'où:

$$\frac{R_1 S_1}{3} - \frac{R_i S_i}{2n+1} = \frac{1}{\rho}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2n+1}\right) > 0.$$

Le premier membre de (1) est donc toujours positif, à moins que n ne soit égal à 1.

Pour $\rho^2 = c^2$, $R_1 S_1$ s'annule et par hypothèse $R_i S_i$ ne s'annule pas; le premier membre est donc négatif. Ainsi la substitution de $\rho^2 = c^2$ et d'une valeur de ρ^2 positive et très grande, donne des résultats de signe contraire; le nombre des racines de l'équation (1) supérieures à c^2 et finies sera donc impair.

Or nous avons vu que le nombre des racines supérieures à c^2 était au plus égal à 3, en y comprenant la racine $\rho^2 = \infty$; si on ne tient pas compte de cette racine, le nombre des racines sera au plus égal à 2; et comme il doit être impair, il faut qu'il soit égal à 1.

Nous avons laissé de côté le cas où $n = 1$ auquel correspondent deux fonctions R_i, à savoir:

$$R_i = \rho, \qquad R_i = \sqrt{\rho^2 - b^2}.$$

Il est aisé de voir que quand ρ^2 croît depuis c^2 jusqu'à $+\infty$, les rapports:

$$\frac{\rho}{\sqrt{\rho^2 - c^2}} \qquad \text{et} \qquad \frac{\sqrt{\rho^2 - b^2}}{\sqrt{\rho^2 - c^2}}$$

vont toujours en décroissant. On doit donc conclure que l'équation (1) n'a aucune racine finie et plus grande que c^2, et que son premier membre est toujours négatif.

Voici donc en résumé quel est le nombre des racines de l'équation (1) finies et supérieures à c^2:

R_i divisible par $\sqrt{\rho^2 - c^2}$; pas de racine; 1^er^ membre positif,

R_i non divisible par $\sqrt{\rho^2 - c^2}$; $n > 1$; une racine,

R_i non divisible par $\sqrt{\rho^2 - c^2}$; $n = 1$; pas de racine; 1^er^ membre négatif.

Renenons maintenant au cas général, et cessons de supposer que $R_k = R_1$; qu'arrive-t-il alors de l'équation (2)?

Soit d'abord $n > m$, et supposons que R_i soit divisible par $\sqrt{\rho^2 - c^2}$ et que R_k ne le soit pas. On voit alors tout de suite que F est positif pour $\rho^2 = c^2$ et pour ρ^2 très grand et positif. L'équation (2) n'a donc pas de racine finie et supérieure à c^2, ou bien elle en a deux. Quant au rapport $\frac{R_i}{R_k}$ il est nul pour $\rho^2 = c^2$ et infini pour $\rho^2 = \infty$; il est donc croissant pour les valeurs de ρ^2 très peu supérieures à c^2 et pour les valeurs très grandes. Donc dans les cas où l'équation (2) a deux racines, il doit en être de même de l'équation (4) et le rapport $\frac{R_i}{R_k}$ doit présenter un maximum et un minimum.

Supposons maintenant que R_k soit divisible par $\sqrt{\rho^2 - c^2}$ sans que R_i le soit. Alors pour $\rho^2 = c^2$, on a:

$$F < 0,$$

pour ρ^2 positif et très grand

$$F > 0;$$

il y a donc un nombre impair de racines, et comme ce nombre ne peut dépasser 2, il faut qu'il soit égal à 1.

Supposons maintenant que R_i et R_k soient tous deux divisibles par $\sqrt{\rho^2 - c^2}$ ou ne le soient ni l'un ni l'autre; on aura alors pour $\rho^2 = c^2$:

$$R_i' R_k - R_k' R_i = 0.$$

Il est possible que cette même équation (4) puisse avoir une autre racine supérieure à c^2, mais elle n'en peut avoir qu'une. Pour qu'elle en ait une, il faut d'abord que l'équation (6) en ait une, c'est à dire que:

$$(7) \qquad B_i - B_k > [n(n+1) - m(m+1)]c^2.$$

Cette condition est d'ailleurs suffisante. Si cette condition est remplie l'équation (2) pourra avoir une racine. Dans le cas contraire elle n'en aura aucune. D'ailleurs il en est encore de même si, la condition (7) n'étant pas remplie, R_i est divisible par $\sqrt{\rho^2 - c^2}$ sans que R_k le soit.

Dans le cas de $n = m$, qu'il nous reste à examiner, l'équation (6) qui se réduit à

$$B_i - B_k = 0$$

ne peut avoir aucune racine. L'équation (4) ne peut donc en avoir qu'une et l'équation (2) en aura également une au plus.

Si de plus R_i et R_k sont tous deux divisibles par $\sqrt{\rho^2 - c^2}$, ou ne le sont ni l'un ni l'autre, le premier membre de (4) s'annule pour $\rho^2 = c^2$ et ne peut avoir d'autre racine. L'équation (2) n'en a donc aucune.

Si R_i est divisible par $\sqrt{\rho^2 - c^2}$ et que R_k ne le soit pas, il peut y avoir 0 ou une racine. Il n'y en a pas si $\frac{R_i}{R_k}$ est plus petit que 1 pour ρ positif et très grand. Il y en a une dans le cas contraire; car alors pour les valeurs très grandes de ρ, F est négatif, et pour $\rho^2 = c^2$, on voit aisément que F est positif.

En résumé on a

si	$n > m$	R_i div.	R_k non div.	0 ou 2 racines
si	$n > m$	R_i non div.	R_k div.	1 racine
si	$n > m$	R_i et	R_k div.	0 ou 1 racine
si	$n > m$	R_i et	R_k non div.	0 ou 1 racine
si	$n = m$	R_i div.	R_k non div.	0 ou 1 racine
si	$n = m$	R_i non div.	R_k div.	0 ou 1 racine
si	$n = m$	R_i div.	R_k div.	0 racine
si	$n = m$	R_i non div.	R_k non div.	0 racine.

§ 11. *Ellipsoïdes de révolution.*

Parmi les ellipsoïdes aplatis de révolution qui sont des figures d'équilibre de notre masse fluide, y en a-t-il qui sont des figures de bifurcation?

Pour étudier ces ellipsoïdes nous prendrons pour variable indépendante $\sqrt{\rho^2 - c^2}$ que nous appellerons k à l'exemple de LIOUVILLE et non plus ρ_2, afin d'éviter l'indice 2. Nous prendrons c pour unité de longueur, de telle sorte que $c^2 = 1$. On aura alors:

$$R_{i,n} = A(k^2 + 1)^{\frac{j}{2}} D^{j+n}(k^2 + 1)^n$$

où

$$i + j = n \quad \text{ou} \quad n + 1$$

A étant une constante et D un indice de dérivation par rapport à k.

A une même fonction:

$$A(k^2 + 1)^{\frac{j}{2}} D^{j+n}(k^2 + 1)^n \tag{1}$$

correspondent en général deux fonctions de LAMÉ distinctes, à savoir:

$$R^1_{n-j,n} \quad \text{et} \quad R^2_{n+1-j,n} \qquad \text{si } j + n \text{ est pair}$$

et

$$R^3_{n-j,n} \quad \text{et} \quad R^4_{n+1-j,n} \qquad \text{si } j + n \text{ est impair.}$$

A chaque fonction (1) correspondront donc deux coëfficients de stabilité que j'appellerai pour abréger:

$$B_{j,n} \quad \text{et} \quad C_{j,n}.$$

Il y a exception quand $j = 0$. Dans ce cas en effet, à une fonction (1) ne correspond qu'une seule fonction de LAMÉ, $R^1_{n,n}$ si n est pair et $R^3_{n,n}$ si n est impair, et par conséquent ne correspond qu'un seul coëfficient de stabilité.

Quand on fait croître ω depuis 0 jusqu'à une certaine valeur ω_0, on trouve comme figures d'équilibre deux ellipsoïdes de révolution qui se confondent pour $\omega = \omega_0$ et disparaissent pour $\omega > \omega_0$. A chaque valeur de $\omega < \omega_0$ correspondent donc deux valeurs de k et il est aisé de voir que pour $\omega = 0$, ces deux valeurs sont $k = 0$ et $k = \infty$. Pour $\omega = \omega_0$, ces deux valeurs se confondent en une seule k_0. Il y a donc deux séries linéaires Σ et Σ' de formes d'équilibre réelles, la série Σ comprenant les ellipsoïdes tels que $k < k_0$, et la série Σ_1, les ellipsoïdes tels que $k > k_0$.

L'ellipsoïde $k = k_0$ est une forme limite.

Si l'on fait varier k depuis 0 jusqu'à $+\infty$, on voit l'ellipsoïde, d'abord infiniment aplati, se rapprocher ensuite indéfiniment de la sphère. En même temps ω croît d'abord de 0 à ω_0 et décroît ensuite de ω_0 à 0.

Si en suivant la série Σ ou la série Σ_1, on voit un des coëfficients de stabilité changer de signe, l'ellipsoïde correspondant sera une forme de bifurcation. Les deux coëfficients de stabilité $B_{j,n}$ et $C_{j,n}$ que je viens de définir sont toujours égaux entre eux. Quelle est la condition pour que ces coëfficients s'annulent? L'équation

$$B_{j,n} = 0$$

n'est autre chose que l'équation (1) du paragraphe précédent. D'après la discussion de ce paragraphe, on voit que le coëfficient $B_{j,n}$ s'annulera pour une certaine valeur de k, si $j + n$ est pair et si n est plus grand que 1, et ne s'annulera jamais si cette condition n'est pas remplie. Cette même discussion montre que ce coëfficient change de signe en s'annulant. Donc l'ellipsoïde correspondant est de bifurcation.

Ainsi à tout système de nombres j et n tels que:

$$(2) \qquad j \equiv n \pmod 2, \qquad n > 1$$

correspond une valeur de k qui annule deux coëfficients de stabilité et par conséquent un ellipsoïde de bifurcation.

Il y a exception pour le système:

$$j = 0, \qquad n = 2.$$

L'ellipsoïde correspondant est l'ellipsoïde $\omega = \omega_0$, $k = k_0$ dont nous avons parlé plus haut. C'est une forme limite et non une forme de bifurcation.

Un autre système intéressant est le suivant:

$$j = 2, \qquad n = 2.$$

L'ellipsoïde correspondant est celui qui appartient à la fois à la série des ellipsoïdes de révolution et à celle des ellipsoïdes de JACOBI.

Soient deux nombres j et n quelconques, satisfaisant aux conditions (2); soit $K_{j,n}$ la valeur de k qui annule le coëfficient $B_{j,n}$ et $\Omega_{j,n}$ la valeur de ω correspondante.

Faisons maintenant

$$\omega = \Omega_{j,n} + \varepsilon$$

ε étant une quantité infiniment petite; à cette valeur de ω correspondront deux formes d'équilibre, un ellipsoïde de révolution E et une figure Φ très peu différente. Etudions de plus près cette figure Φ. Nous définirons cette figure de la façon suivante: Menons à l'ellipsoïde E une normale quelconque. Nous définirons le point de l'ellipsoïde qui est le pied de cette normale par deux coordonnées φ et μ; φ sera l'angle formé par le plan qui passe par le point considéré et l'axe des z avec le plan des xz, et μ sera la deuxième coordonnée elliptique comprise entre $b^2 = 0$ et $c^2 = 1$. Je prendrai sur cette normale une longueur ζ. La position d'un point dans l'espace sera ainsi définie par les trois coordonnées ζ, μ et φ, et c'est dans ce système de coordonnées que je vais écrire l'équation de la figure Φ. Au système de nombres j et n correspondent deux fonctions de LAMÉ ainsi qu'on l'a vu:

$$R^{1 \text{ ou } 3}_{n-j,n} \qquad \text{et} \qquad R^{2 \text{ ou } 4}_{n+1-j,n}$$

auxquelles il faut adjoindre leurs conjuguées:

$$(3) \qquad \begin{array}{ccc} M^{1 \text{ ou } 3}_{n-j,n} & \text{et} & M^{2 \text{ ou } 4}_{n+1-j,n} \\ N^{1 \text{ ou } 3}_{n-j,n} & \text{et} & N^{2 \text{ ou } 4}_{n+1-j,n}. \end{array}$$

Les deux fonctions M sont égales entre elles et s'obtiennent en remplaçant dans la fonction R correspondante, k par $\sqrt{1-\mu^2}$ et les deux fonctions N sont égales, l'une à $\cos j\varphi$, l'autre à $\sin j\varphi$.

L'équation de la figure Φ pourra alors s'écrire:

$$\zeta = l(A_1 M_1 N_1 + A_2 M_2 N_2)$$

en négligeant les infiniment petits du 2^d ordre (ε étant du 1^er ordre). Dans cette équation l a le même sens que dans le § 8; M_1, N_1, M_2 et N_2

sont les fonctions (3); A_1 et A_2 sont deux constantes infiniment petites du 1[er] ordre et dont le rapport est arbitraire.

Posons:

$$A_1 = \theta \cos \lambda, \qquad A_2 = \theta \sin \lambda$$

θ étant une constante infiniment petite dépendante de ε, et λ étant une constante arbitraire; il viendra, en remplaçant M_1, N_1, M_2 et N_2 par leurs valeurs:

$$\zeta = \theta l \cos (j\varphi - \lambda) M \tag{4}$$

la fonction M s'obtenant comme je l'ai dit plus haut.

Si l'équation (4) était l'équation exacte de la figure Φ, cette équation prouverait que la figure Φ jouirait des symétries suivantes:

1°. Si $j = 0$, la figure Φ serait de révolution autour de l'axe des z.

2°. Si j n'est pas nul, la figure Φ ne changerait pas quand on la ferait tourner autour de l'axe des z d'un angle $\frac{2\pi}{j}$; elle admettrait j plans de symétrie passant par l'axe des z, de façon que l'angle dièdre de deux de ces plans de symétrie consécutifs soit $\frac{\pi}{j}$.

3°. Comme $j + n$ est toujours pair, le plan des xy serait aussi un plan de symétrie.

4°. Enfin si j est pair, l'axe des z serait un axe de symétrie, et l'origine un centre de symétrie.

Mais l'équation (4) n'est qu'une équation approximative de la figure Φ. Pour l'établir nous avons négligé les infiniment petits du 2[d] ordre; de sorte qu'on peut se demander si ces diverses symétries subsisteront encore quand on étudiera l'équation exacte de la figure Φ et qu'on tiendra compte des termes d'ordre supérieur. La réponse à cette question doit être affirmative.

Pour s'en assurer, voici quel artifice on doit employer. Supposons qu'on introduise dans le système des liaisons auxiliaires et qu'on assujettisse la masse fluide à présenter les symétries que nous venons d'énumérer. Je dis que, même avec ces liaisons supplémentaires, l'ellipsoïde qui correspond à la valeur $K_{j,n}$ de k et à la valeur $\Omega_{j,n}$ de ω sera encore une forme de bifurcation.

En effet nous avons vu au § 9 qu'une surface très peu différente de cet ellipsoïde peut être définie par la distance ζ d'un point de cette surface à l'ellipsoïde (comptée sur la normale à l'ellipsoïde) et que cette distance ζ elle-même est donnée en fonction des coordonnées elliptiques sous la forme d'une série convergente

$$\zeta = l \Sigma A_p M_p N_p$$

M_p et N_p étant des fonctions de Lamé, de telle sorte que la surface en question sera déterminée par la connaissance des coëfficients A_p. Nous avons vu ensuite dans le même paragraphe que l'énergie potentielle totale W pouvait s'écrire, en négligeant les cubes des coëfficients A_p:

$$W = W_0 + \Sigma A_p^2 B_p \tag{5}$$

les B_p étant les coëfficients de stabilité; de plus, avons-nous dit, pour que l'ellipsoïde soit une figure de bifurcation, il faut et il suffit que l'un des B_p s'annule.

Qu'arrive-t-il maintenant quand on introduit des liaisons dans le système?

Supposons d'abord qu'on assujettisse la masse fluide à être de révolution autour de l'axe des z et symétrique par rapport au plan des xy. Comment ces conditions s'exprimeront-elles analytiquement? Elles signifieront que tous les coëfficients A_p sont assujettis à être nuls, sauf ceux qui correspondent à une fonction M_p dont les nombres caractéristiques j_1 et n_1 satisfassent à la condition:

$$j_1 = 0, \qquad n_1 \equiv 0 \pmod 2.$$

Que faut-il maintenant pour que l'ellipsoïde soit de bifurcation quand on envisage l'équilibre d'une masse fluide assujettie à ces liaisons? Il suffit que dans l'expression (5), le coëfficient B_p de l'un des termes A_p^2 qui ne sont pas assujettis à être nuls, change de signe.

Nous avons supposé que pour l'ellipsoïde $k = K_{j,n}$, le coëfficient de stabilité défini par les deux nombres j et n s'annulait; si nous avons:

$$j = 0, \qquad n \equiv 0 \pmod 2)$$

ce coëfficient de stabilité est un de ceux qui multiplient un terme A_p^2 non assujetti par les liaisons à être nul.

Si donc on envisage l'équilibre du système soumis aux liaisons que nous venons d'énumérer, l'ellipsoïde $k = K_{0,n}$ sera encore une figure de bifurcation. Pour la valeur de

$$\omega = \Omega_{0,n} + \varepsilon$$

on aura donc deux formes d'équilibre du système à liaisons, à savoir un ellipsoïde et une figure Φ' très peu différente.

La figure Φ', à cause des liaisons mêmes auxquelles elle est supposée assujettie, sera de révolution et symétrique par rapport au plan des xy. Mais par suite de la nature même de ces liaisons, la figure Φ' qui est en équilibre en tenant compte des liaisons, restera en équilibre quand on les supprimera. Ce ne peut donc être que la figure Φ elle même qui se trouve ainsi être de révolution quand j est nul.

Supposons maintenant que j ne soit pas nul.

Assujettissons le système aux liaisons suivantes; la masse devra admettre pour plans de symétrie le plan des xy et les j plans:

$$\frac{y}{x} = \operatorname{tg}\frac{h\pi}{j}. \qquad (h = 0, 1, 2, \ldots, j-1)$$

Ces conditions traduites analytiquement signifient que tous les coëfficients A_p sont assujettis à être nuls, sauf ceux qui correspondent à une fonction M_p dont les nombres caractéristiques j_1 et n_1 satisfont à la condition:

$$j_1 \equiv 0 \pmod{j}, \qquad j_1 + n_1 \equiv 0 \pmod{2}.$$

De plus nous avons vu que parmi les fonctions N, les unes sont de la forme $\cos j\varphi$ et les autres de la forme $\sin j\varphi$; les coëfficients de ces dernières seront tous assujettis à être nuls.

Pour que l'ellipsoïde soit de bifurcation quand on considère l'équilibre d'une masse soumise à ces liaisons, il faut et il suffit qu'on voie s'annuler l'un des coëfficients de stabilité B_p qui multiplie un terme A_p^2 que les liaisons n'assujettissent pas à être nul.

Pour l'ellipsoïde $k = K_{j,n}$, les deux coëfficients de stabilité définis par les deux nombres j et n s'annulent; or l'un d'entre eux multiplie un terme A_p^2 que les liaisons n'obligent pas à s'annuler.

Donc, même dans le système à liaisons, l'ellipsoïde $K_{j,n}$ sera une forme de bifurcation. Si l'on fait:

$$\omega = \Omega_{j,n} + \varepsilon$$

on aura deux formes d'équilibre du système à liaisons, à savoir un ellipsoïde et une figure Φ' très peu différente.

La figure Φ', en vertu de ses liaisons mêmes, aura $j + 1$ plans de symétrie. Mais ces liaisons sont de telle nature que l'équilibre de la figure Φ' subsistera quand on les supprimera. La figure Φ' n'est donc autre chose que la figure Φ elle-même qui doit ainsi avoir $j + 1$ plans de symétrie.

Je vais maintenant expliquer pourquoi les liaisons, dont il vient d'être question, sont telles que si une masse fluide est en équilibre en tenant compte de ces liaisons, l'équilibre subsistera encore quand on les supprimera.

Pour simplifier l'exposition, je supposerai un seul plan de symétrie P qui pourra être, soit le plan des xy, soit un plan passant par l'axe des z.

La condition d'équilibre de la masse fluide supposée libre, c'est que le potentiel V, dû à l'action de toutes les forces qui agissent sur une molécule du fluide, soit constant sur toute la surface libre.

Si on assujettit la masse fluide à être symétrique par rapport au plan P, cette condition se trouve un peu modifiée. Soit V le potentiel en un point quelconque de la surface libre, V' le potentiel en un autre point de cette surface, symétrique du premier par rapport au plan P; la nouvelle condition d'équilibre sera:

$$V + V' = \text{const.}$$

Supposons que cette condition soit remplie et que la masse fluide se trouve en équilibre sous l'action des forces extérieures et des liaisons, et soit par conséquent symétrique par rapport au plan P. Si les forces extérieures se réduisent à l'attraction et à la force centrifuge, elles seront elles-mêmes symétriques par rapport au plan P et on aura par conséquent:

$$V = V'$$

d'où l'on déduit

$$V = \text{const.}$$

Cette condition montre que l'équilibre subsistera encore quand on supprimera les liaisons.

C. Q. F. D.

Il résulte de cette discussion que les symétries que nous avions été conduits à attribuer à la surface Φ, en partant de l'équation (4) qui n'était qu'approximative, lui appartiennent rigoureusement, même quand on tient compte des termes d'ordre supérieur qui entrent dans son équation exacte.

Nous allons nous occuper maintenant de démontrer un résultat qui nous sera utile dans la suite.

Si k est positif et très grand, l'ellipsoïde est très voisin de la sphère et tous les coëfficients de stabilité sont négatifs. Si l'on fait décroître k, il arrivera un moment où un ou deux de ces coëfficients s'annuleront. Quel sera le premier de ces coëfficients qui changera ainsi de signe? Je dis que ce sera celui qui correspond aux nombres:

$$j = 2, \qquad n = 2.$$

Appelons en effet R_2 la fonction de LAMÉ correspondante et S_2 sa conjuguée. Nous aurons:

$$R_2 = k^2 + 1.$$

Soit maintenant R_i une autre fonction de LAMÉ et S_i sa conjuguée. Nous aurons:

$$R_i = A(k^2 + 1)^{\frac{j}{2}} D^{j+n}(k^2 + 1)^n$$

A étant une constante. Nous supposerons que $j + n$ est pair, sans quoi le coëfficient correspondant à R_i ne s'annulerait jamais.

Il s'agit de démontrer que la racine $K_{2,2}$ de l'équation

$$\frac{R_1 S_1}{3} - \frac{R_2 S_2}{5} = 0$$

est plus grande que la racine $K_{j,n}$ de l'équation:

$$\frac{R_1 S_1}{3} - \frac{R_i S_i}{2n+1} = 0.$$

Pour cela il suffit de démontrer que l'expression:

$$\frac{R_2 S_2}{5} - \frac{R_i S_i}{2n+1}$$

est toujours positive, ou bien encore que le quotient:

$$\frac{R_i}{R_2}$$

est toujours croissant.

Nous distinguerons trois cas.

1°. Supposons d'abord $j > 1$.

Il vient alors:

$$\frac{R_i}{R_2} = A(k^2+1)^{\frac{j-2}{2}} D^{j+n}(k^2+1)^n.$$

A est une constante positive; $(k^2+1)^{\frac{j-2}{2}}$ se réduit à 1 ou est toujours croissant; enfin le dernier facteur $D^{j+n}(k^2+1)^n$ est un polynôme entier en k dont tous les coëfficients sont positifs et est par conséquent toujours croissant.

C. Q. F. D.

2°. Supposons maintenant $j = 0$; $n = 2p$.

Il vient alors

$$\frac{R_i}{R_2} = A\frac{D^{2p}(k^2+1)^{2p}}{(k^2+1)}.$$

La dérivée logarithmique du 1er nombre est donc

$$\frac{D^{2p+1}(k^2+1)^{2p}}{D^{2p}(k^2+1)^{2p}} - \frac{2k}{k^2+1}.$$

Je veux démontrer qu'elle est positive, c'est à dire que

$$F = (k^2+1)D^{2p+1} - 2kD^{2p} > 0$$

où D^{2p} et D^{2p+1} désignent les dérivées d'ordre $2p$ et $2p + 1$ de $(k^2 + 1)^{2p}$. On trouve:

$$(k^2 + 1)^{2p} = \sum \frac{\underline{|2p}}{\underline{|q}\,\underline{|2p - q}} k^{2q} \qquad {\scriptstyle (q=0,1,2,\ldots,2p)}$$

d'où:

$$D^{2p} = \sum \frac{\underline{|2p}\,\underline{|2q}}{\underline{|q}\,\underline{|2p - q}\,\underline{|2q - 2p}} k^{2q-2p} \qquad {\scriptstyle (q=p,\,p+1,\ldots,2p)}$$

Nous écrirons pour abréger:

$$D^{2p} = \sum A_q k^{2q-2p}$$

et il viendra:

$$F = (k^2 + 1)\sum A_q (2q - 2p) k^{2q-2p-1} - 2k \sum A_q k^{2q-2p}.$$

Le coëfficient de

$$k^{2q-2p+1}$$

dans F sera donc

$$(2q - 2p - 2)A_q + (2q - 2p + 2)A_{q+1}.$$

Pour que F soit toujours positif, il suffit que tous ces coëfficients soient positifs. Or comme tous les A_q sont positifs, il ne peut y avoir de doute que si $2q - 2p - 2$ est négatif, c'est à dire pour:

$$q = p.$$

La coëfficient de F devient alors

$$2A_{p+1} - 2A_p.$$

Si nous écrivons qu'il est positif, il viendra:

$$A_{p+1} > A_p$$

ou bien:

$$\frac{\underline{|2p}\,\underline{|2p + 2}}{\underline{|p + 1}\,\underline{|p - 1}\,\underline{|2}} > \frac{\underline{|2p}\,\underline{|2p}}{\underline{|p}\,\underline{|p}}$$

ou bien encore:

$$\frac{(2p + 2)(2p + 1)}{2.(p + 1)} > \frac{1}{p}$$

ou enfin:

$$p(2p+1) > 1$$

ce qui est évident; donc F est toujours positif.

C. Q. F. D.

3°. On peut supposer enfin:

$$j = 1, \qquad n = 2p+1.$$

Il viendra

$$\frac{R_i}{R_2} = A\frac{D^{2p+2}(k^2+1)^{2p+1}}{\sqrt{k^2+1}}$$

ou en désignant simplement par D^k la k^e dérivée de $(k^2+1)^{2p+1}$

$$\frac{R_i}{R_2} = \frac{AD^{2p+2}}{\sqrt{k^2+1}}$$

dont la dérivée logarithmique est:

$$\frac{D^{2p+3}}{D^{2p+2}} - \frac{k}{k^2+1};$$

pour qu'elle soit positive, il faut que

$$F = (k^2+1)D^{2p+3} - kD^{2p+2} > 0.$$

Or on a

$$(k^2+1)^{2p+1} = \sum \frac{\underline{|2p+1}}{\underline{|q}\,\underline{|2p+1-q}} k^{2q}$$

d'où:

$$D^{2p+2} = \sum A_q k^{2q-2p-2} = \sum \frac{\underline{|2p+1}\,\underline{|2q}}{\underline{|q}\,\underline{|2p+1-q}\,\underline{|2q-2p-2}} k^{2q-2p-2}.$$

$$(q = p+1,\ p+2,\ \ldots,\ 2p+1).$$

Il vient donc

$$F = (k^2+1)\sum A_q(2q-2p-2)k^{2q-2p-3} - k\sum A_q k^{2q-2p-2}.$$

Le coëfficient de

$$k^{2q-2p-1}$$

dans F sera donc:

$$A_q(2q - 2p - 3) + A_{q+1}(2q - 2p).$$

Ce coëfficient ne pourrait être négatif que si l'on avait:

$$2q - 2p - 3 < 0$$

ce qui ne peut avoir lieu que pour $q = p + 1$.

Le coëfficient de F devient alors

$$2A_{p+2} - 3A_{p+1}.$$

Ecrivons que ce coëfficient est positif, il viendra:

$$3\frac{\underline{|2p+1}\,\underline{|2p+2}}{\underline{|p+1}\,\underline{|p}} < 2\frac{\underline{|2p+1}\,\underline{|2p+4}}{\underline{|p+2}\,\underline{|p-1}\,\underline{|2}}$$

ou:

$$\frac{3}{p} < \frac{(2p+3)(2p+4)}{p+2}$$

ou:

$$p(2p+3)(2p+4) - 3(p+2) > 0$$

ou:

$$4p^3 + 14p^2 + 9p - 6 > 0$$

inégalité qui est vérifiée même pour $p = 1$.

Donc F est encore positif.

C. Q. F. D.

Nous devons conclure de cette discussion que si l'on fait décroître k depuis $+\infty$ jusqu'à 0, de façon que l'ellipsoïde d'abord très voisin d'une sphère s'aplatisse de plus en plus, on rencontrera une infinité d'ellipsoïdes qui appartiendront à d'autres séries linéaires de figures d'équilibre. Le premier que l'on rencontrera ainsi sera celui qui appartient à la série des ellipsoïdes de JACOBI et qui correspond au cas de $j = n = 2$.

§ 12. *Ellipsoïdes de Jacobi.*

Nous allons rechercher maintenant si parmi les ellipsoïdes de Jacobi il y a des formes d'équilibre de bifurcation.

Nous poserons comme dans le paragraphe précédent:

$$\rho^2 = k^2 + c^2, \qquad c^2 = 1$$

et nous ferons varier b^2 depuis 0 jusqu'à $c^2 = 1$.

A chaque valeur de b^2 correspondra une valeur de k, que j'appellerai H et qui sera telle que l'ellipsoïde dont les axes sont k, $\sqrt{k^2 + c^2 - b^2}$ et $\sqrt{k^2 + 1}$ soit un ellipsoïde de Jacobi.

Voyons quelle relation lie b^2 à H.

Parmi les fonctions de Lamé du 2^d ordre, je citerai la suivante:

$$\rho\sqrt{\rho^2 - b^2}.$$

Nous l'appellerons R_2; en effet si on fait $b^2 = 0$, elle se réduit à $k^2 + 1$; c'est donc bien une des deux fonctions que nous avons appelées R_2 dans le paragraphe précédent et qui se réduisaient toutes deux à $k^2 + 1$ pour $b^2 = 0$; nous réserverons la notation R_2 à la seule fonction $\rho\sqrt{\rho^2 - b^2}$, à laquelle correspondront une fonction S_2 et deux fonctions:

$$M_2 = \mu\sqrt{\mu^2 - b^2}, \qquad N_2 = \nu\sqrt{b^2 - \nu^2}.$$

Si l'on fait tourner l'ellipsoïde E d'un angle infiniment petit autour de l'axe des z, de façon à lui faire occuper la position E'; puis que l'on appelle ζ la distance des deux ellipsoïdes E et E' comptée normalement à l'un d'eux, on trouvera aisément:

$$\zeta = A_2 l M_2 N_2$$

A_2 étant une constante infiniment petite.

Mais si l'ellipsoïde E est un ellipsoïde de Jacobi, son équilibre sera indifférent et ne sera pas altéré quand on fera tourner la figure d'un angle quelconque autour de l'axe des z. L'équilibre subsistera quand on fera varier A_2 d'une manière quelconque. Donc le coëfficient de stabilité correspondant devra être nul, c'est à dire que l'on devra avoir:

$$\frac{R_1S_1}{3} - \frac{R_2S_2}{5} = 0. \tag{1}$$

Telle est l'équation qui lie H à b^2 et qui exprime que l'ellipsoïde E est un ellipsoïde de JACOBI.

Cela montre qu'à chaque valeur de b^2 correspond une valeur de H et une seule. Lorsque b^2 tend vers c^2, cette valeur de H tend vers 0. On sait en effet que quand ω tend vers 0, le rapport du petit axe au moyen, dans l'ellipsoïde de JACOBI, tend vers l'unité et que le rapport du petit axe au grand tend vers 0.

Pour qu'un ellipsoïde de JACOBI soit de bifurcation, il faut qu'un autre de ses coëfficients de stabilité s'annule, ce qui exige que l'on ait:

$$\frac{R_1S_1}{3} = \frac{R_2S_2}{5} = \frac{R_iS_i}{2n+1} \tag{2}$$

n étant l'ordre de la fonction R_i.

L'équation:

$$\frac{R_1S_1}{3} - \frac{R_iS_i}{2n+1} = 0 \tag{3}$$

aura une racine que j'appellerai K_i, pourvu que R_i ne soit pas divisible par $\sqrt{\rho^2 - c^2}$.

Les équations (2) se réduiront donc à

$$H = K_i.$$

Pour $b^2 = 0$, on revient au cas du paragraphe précédent, et on a vu à la fin de ce paragraphe que:

$$H > K_i$$

car la plus grande des valeurs de k pour lesquelles un coëfficient de stabilité s'annulait, était précisément $K_{2,2}$ c'est à dire H.

Voyons maintenant ce qui se passe pour $b^2 = c^2 = 1$.

La fonction R_i se réduit à

$$A(\rho^2 - 1)^{\frac{h}{2}} D^{h+n} (\rho^2 - 1)^n$$

h étant un entier plus petit que n. En particulier R_1 se réduit à

$$(\rho^2 - 1)^{\frac{1}{2}}.$$

Il résulte de là que si h n'est pas nul, l'équation (3) est satisfaite pour $\rho^2 = 1$. Par conséquent pour $b^2 = c^2$, K_i devient nul et égal à H.

Au contraire si $h = 0$, R_i se réduit à

$$AD^n(\rho^2 - 1)^n$$

et K_i est positif et par conséquent plus grand que H.

Si donc h est nul, l'équation $H = K_i$ est satisfaite au moins une fois, et certainement un nombre impair de fois.

Nous pouvons discuter également l'équation:

$$\frac{R_2 S_2}{5} - \frac{R_i S_i}{2n + 1} = 0. \tag{4}$$

Nous devons rechercher d'abord dans quels cas le rapport $\frac{R_i}{R_2}$ est toujours croissant.

Si nous laissons de côté comme il convient les fonctions R_i divisibles par $\sqrt{\rho^2 - c^2}$, la fonction R_i peut affecter 4 formes différentes, à savoir:

$$R_i = (\rho^2 - \alpha_1)(\rho^2 - \alpha_2) \ldots (\rho^2 - \alpha_p)$$

$$R_i = \rho\sqrt{\rho^2 - b^2}(\rho^2 - \alpha_1)(\rho^2 - \alpha_2) \ldots (\rho^2 - \alpha_{p-1})$$

si $n = 2p$ et

$$R_i = \rho(\rho^2 - \alpha_1)(\rho - \alpha_2) \ldots (\rho^2 - \alpha_p)$$

$$R_i = \sqrt{\rho^2 - b^2}(\rho^2 - \alpha_1)(\rho^2 - \alpha_2) \ldots (\rho^2 - \alpha_p)$$

si $n = 2p + 1$. Les α sont des quantités positives comprises entre 0 et c^2 et que je suppose rangées dans l'ordre décroissant.

Tous les α étant plus petits que c^2, tous les facteurs $\rho^2 - \alpha$ seront croissants quand ρ^2 croîtra de c^2 à $+\infty$. De même tous les α étant positifs, le rapport

$$\frac{\rho^2 - \alpha}{\rho}$$

sera constamment croissant. Enfin le rapport:

$$\frac{\rho^2 - \alpha}{\sqrt{\rho^2 - b^2}}$$

sera croissant si α est plus grand que b^2.

Dans les quatre cas possibles, nous pourrons écrire:

$$\frac{R_i}{R_2} = \frac{\rho^2 - \alpha_1}{\sqrt{\rho^2 - b^2}} \frac{\rho^2 - \alpha_2}{\rho} (\rho^2 - \alpha_3) \ldots (\rho^2 - \alpha_p)$$

$$\frac{R_i}{R_2} = (\rho^2 - \alpha_1)(\rho^2 - \alpha_2) \ldots (\rho^2 - \alpha_{p-1})$$

$$\frac{R_i}{R_2} = \frac{\rho^2 - \alpha_1}{\sqrt{\rho^2 - b^2}} (\rho^2 - \alpha_2) \ldots (\rho^2 - \alpha_p)$$

$$\frac{R_i}{R_2} = \frac{\rho^2 - \alpha_1}{\rho} (\rho^2 - \alpha_2) \ldots (\rho^2 - \alpha_p).$$

Tous ces facteurs seront croissants si α_1 est plus grand que b^2, ou bien encore si R_i est divisible par $\sqrt{\rho^2 - b^2}$. Dans ces deux cas le rapport $\frac{R_i}{R_2}$ sera toujours croissant.

Il suit de là que l'équation (4) ne pourra avoir de racine que si R_i n'est pas divisible par $\sqrt{\rho^2 - b^2}$ et a tous ses zéros inférieurs à b^2. Les seules fonctions R_i qui satisfassent à ces conditions, sont celles que nous avons représentées par la notation $R^1_{0,n}$ et qui pour $b^2 = c^2 = 1$ se réduisent à

$$AD^n(\rho^2 - 1)^n.$$

Les équations (2) ne peuvent donc être satisfaites si R_i n'est pas égal à $R^1_{0,n}$, et si $R_i = R^1_{0,n}$, nous avons vu qu'elles peuvent toujours l'être.

Il resterait à établir qu'elles ne peuvent l'être que d'une seule manière.

Bien que diverses raisons me fassent penser qu'il en est probablement ainsi, je n'ai pu encore le démontrer rigoureusement. Il y aurait surtout intérêt à établir cette proposition en ce qui concerne la plus simple de toutes les fonctions $R^1_{0,n}$, c'est à dire en ce qui concerne:

$$R^1_{0,3} = \frac{1}{5}\rho[5\rho^2 - 2(b^2 + c^2) + \sqrt{4b^4 - 7b^2c^2 + 4c^4}).$$

Il faudrait pour cela des calculs qui seraient sans doute fort longs, mais qui ne seraient pas inextricables.

Soit C_n le coëfficient de stabilité qui s'annule quand les équations

$$\frac{R_1 S_1}{3} = \frac{R_2 S_2}{5} = \frac{R^1_{0,n} S^1_{0,n}}{2n + 1}$$

sont satisfaites.

Supposons que b^2 croisse depuis 0 jusqu'à 1; nous verrons tous les coëfficients C_n s'annuler successivement.

On peut se demander quel est celui qui s'annule le premier. Je vais démontrer que c'est C_3.

Il suffira pour montrer qu'il en est ainsi, d'établir que le rapport

$$\frac{R^1_{0,n}}{R^1_{0,p}} \text{ (où } n > p)$$

est toujours croissant quand ρ^2 croît de c^2 à l'infini.

On le vérifie aisément quand $b^2 = 0$ et quand $b^2 = c^2$.

Supposons maintenant que b^2 soit quelconque. Soient B_n et B_p les valeurs de B qui correspondent aux fonctions $R^1_{0,n}$ et $R^1_{0,p}$. Pour que le rapport:

$$\frac{R^1_{0,n}}{R^1_{0,p}}$$

ne fût pas constamment croissant, il faudrait, comme on l'a vu au § 10 que l'équation en ρ^2

$$\psi = [n(n + 1) - p(p + 1)]\rho^2 - (B_n - B_p) = 0$$

eût une racine supérieure à c^2. Je dis que cela est impossible.

En effet l'expression suivante:

$$R^1_{0,p}\frac{dR^1_{0,n}}{d\varepsilon}-R^1_{0,n}\frac{dR^1_{0,p}}{d\varepsilon}$$

s'annule pour $\rho^2 = b^2$ et pour $\rho^2 = c^2$; car ces valeurs annulent à la fois $\frac{dR^1_{0,n}}{d\varepsilon}$ et $\frac{dR^1_{0,p}}{d\varepsilon}$.

Il faut donc que dans l'intervalle compris entre b^2 et c^2, l'expression

$$R^1_{0,p}\frac{d^2R^1_{0,n}}{d\varepsilon^2}-R^1_{0,n}\frac{d^2R^1_{0,p}}{d\varepsilon^2}=\psi R^1_{0,n}R^1_{0,p}$$

s'annule au moins une fois. Or $R^1_{0,n}$ et $R^1_{0,p}$ ne peuvent s'annuler puisque tous leurs zéros sont inférieurs à b^2. Donc ψ devra s'annuler pour une valeur de ρ^2 comprise entre b^2 et c^2; cette expression, qui est du 1er degré en ρ^2 ne pourra donc pas s'annuler pour une valeur ρ^2 plus grande que c^2.

C. Q. F. D.

Nous devons donc conclure que C_3 est le premier coëfficient qui s'annule.

Les ellipsoïdes de Jacobi pour lesquels un des coëfficients C_n s'annule sont des ellipsoïdes de bifurcation. A chacun de ces coëfficients correspond donc une nouvelle série linéaire de formes d'équilibre. Que savons-nous sur les figures qui font partie de ces différentes séries linéaires?

Soit ω_n la valeur de la vitesse angulaire pour laquelle le coëfficient C_n s'annule; soit ε une quantité infiniment petite. Pour la vitesse angulaire $\omega_n + \varepsilon$, il y aura deux figures d'équilibre possibles, à savoir un ellipsoïde et une surface S qui en diffère infiniment peu et qui a pour équation:

$$\zeta = \theta l M^1_{0,n} N^1_{0,n}. \tag{5}$$

Dans cette équation, ζ, θ et l ont la même signification que dans le paragraphe précédent, et $M^1_{0,n}$, $N^1_{0,n}$ sont les fonctions conjuguées de $R^1_{0,n}$. La fonction $M^1_{0,n}$ ne contient en facteur ni $\sqrt{c^2-\mu^2}$ ni $\sqrt{\mu^2-b^2}$; de même la fonction $N^1_{0,n}$ ne contient en facteur ni $\sqrt{c^2-\nu^2}$ ni $\sqrt{b^2-\nu^2}$. Donc ζ

ne change pas quand un de ces quatre radicaux change de signe, c'est à dire quand y se change en $-y$, ou bien z en $-z$.

Cela veut dire que les plans des xz et des xy sont des plans de symétrie de la surface S.

Si maintenant n est pair, $M^1_{0,n}$, $N^1_{0,n}$ et par conséquent ζ ne changent pas quand on change μ en $-\mu$ ou ν en $-\nu$; cela revient à dire que ζ ne change pas quand on change x en $-x$ ou que la surface S est symétrique par rapport au plan des yz.

Cette symétrie n'a pas lieu si n est impair; ζ se change alors en $-\zeta$ quand x se change en $-x$.

Ainsi la surface S admet, si n est pair, les mêmes plans de symétrie que l'ellipsoïde dont elle dérive, et si n est impair, elle n'est symétrique que par rapport aux plans qui sont perpendiculaires au petit axe et à l'axe moyen. Dans tous les cas, elle est symétrique par rapport au grand axe.

Ce grand axe n'est pas l'axe de rotation et si n est impair, la surface S n'est pas symétrique par rapport à l'axe de rotation. Il est vrai que l'équation (5) sur laquelle nous venons de nous appuyer pour établir ces résultats n'est qu'approximative et qu'on y a négligé les quantités de l'ordre de θ^2. Mais on montrerait par un raisonnement, de tout point semblable à celui du paragraphe précédent, que les symétries auxquelles nous conduit l'équation approximative (5) subsisteraient encore si on la remplaçait par l'équation exacte de la surface S.

Cette surface a donc *rigoureusement* deux plans de symétrie si n est impair, et trois si n est pair.

Parmi les surfaces S, nous distinguerons la surface Σ_3 qui correspond au coëfficient de stabilité C_3. Quelle est son intersection avec l'ellipsoïde dont elle dérive? Pour avoir cette courbe, il suffit d'écrire que ζ est nul, ou que

$$M^1_{0,3} = 0, \qquad N^1_{0,3} = 0$$

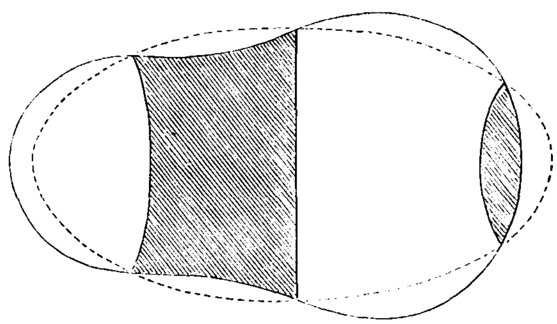
ce qui donne:

$$\mu = 0, \qquad \nu = 0, \qquad \nu = \pm\sqrt{\frac{2(b^2 + c^2) - \sqrt{4b^4 - 7b^2c^2 + 4c^4}}{5}}.$$

Cette intersection se compose donc de l'ellipse principale, section de l'ellipsoïde par le plan des yz et de deux lignes de courbure de cet ellipsoïde.

Cela n'est vrai, bien entendu, qu'approximativement et en négligéant le carré de θ.

La figure représente en projection sur l'un des deux plans de symétrie la surface Σ_3 et l'ellipsoïde dont elle dérive.



Le contour apparent de l'ellipsoïde est représenté en trait pointillé, le contour apparent de Σ_3 et l'intersection des deux surfaces en trait plein. On a couvert de hachures la portion de la surface Σ_3 qui est vue à travers l'ellipsoïde.

On voit d'après cette figure comment on passe de l'ellipsoïde de Jacobi à la surface Σ_3. La plus grande portion de la matière semble se rapprocher de la forme sphérique, tandis que la plus petite portion de cette même matière sort de l'ellipsoïde par l'extremité du grand axe, comme si elle voulait se séparer de la masse principale. Qu'on me pardonne d'employer un langage aussi dépourvu de précision mathématique.

§ 13. *Petits mouvements d'un ellipsoïde.*

Imaginons d'abord une masse fluide homogène rapportée à des axes fixes; et supposons que ses molécules s'attirent suivant la loi de Newton et que chacune d'elles soit soumise en outre à une force dont les composantes suivant les trois axes soient αx, βy et γz. Les coëfficients α, β et γ devront être choisis de telle sorte que la masse soit en équilibre absolu sous la forme de l'ellipsoïde:

$$\frac{x^2}{\rho^2} + \frac{y^2}{\rho^2 - b^2} + \frac{z^2}{\rho^2 - c^2} = 1.$$

Supposons maintenant que la masse soit dérangée de cette position d'équilibre, de telle façon que les coordonnées de la molécule (x, y, z) deviennent $x + \delta x$, $y + \delta y$, $z + \delta z$. Nous imaginerons que δx, δy, δz sont tels que:

$$\delta x dx + \delta y dy + \delta z dz = d\varphi$$

soit une différentielle exacte et que:

$$\delta x = \frac{d\varphi}{dx}, \qquad \delta y = \frac{d\varphi}{dy}, \qquad \delta z = \frac{d\varphi}{dz}.$$

Pour l'équation de continuité, nous devons avoir:

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{d^2\varphi}{dy^2} + \frac{d^2\varphi}{dz^2} = 0$$

de sorte que nous pourrons écrire:

$$\varphi = \Sigma \xi RMN$$

les ξ étant divers coëfficients constants et R, M, N étant les fonctions de Lamé.

Les composantes de la vitesse de la molécule (x, y, z) sont:

$$u = \frac{d^2\varphi}{dx dt}, \qquad v = \frac{d^2\varphi}{dy dt}, \qquad w = \frac{d^2\varphi}{dz dt}.$$

La demi-force vive T aura alors pour expression:

$$\frac{1}{2}\int(u^2 + v^2 + w^2) dx dy dz$$

l'intégrale étant étendue à tous les éléments du volume de l'ellipsoïde. Mais en vertu du théorème de Green, cette intégrale peut être remplacée par la suivante:

$$\frac{1}{2}\int \frac{d\varphi}{dt}(u dy dz + v dx dz + w dx dy)$$

en tenant compte de l'équation de continuité, ou bien encore:

$$\frac{1}{2}\int \frac{d\varphi}{dt} \frac{d^2\varphi}{dt dn} d\omega.$$

Dans cette expression $d\omega$ désigne un élément quelconque de la superficie de l'ellipsoïde et $\frac{d^2\varphi}{dt\,dn}dn$ est l'accroissement de la fonction $\frac{d\varphi}{dt}$ quand le point correspondant subit un déplacement dn dans une direction normale à l'ellipsoïde.

Cherchons à évaleur $\frac{d^2\varphi}{dt\,dn}$. Nous trouverons:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \sum \frac{d\xi}{dt} RMN$$

et

$$\frac{d^2\varphi}{dt\,dn} = \sum \frac{d\xi}{dt} MN \frac{dR}{d\rho} \frac{d\rho}{dn}.$$

Or on a:

$$\frac{d\rho}{dn} = l\sqrt{(\rho^2 - b^2)(\rho^2 - c^2)}$$

l ayant la même signification que dans les paragraphes précédents.

On en conclut:

$$T = \frac{1}{2}\sum \int \left(\frac{d\xi}{dt} RMN\right)\left(\frac{d\xi_1}{dt}\frac{dR_1}{d\rho} M_1 N_1\right) l\sqrt{(\rho^2 - b^2)(\rho^2 - c^2)}\,d\omega$$

la fonction de Lamé M_1 pouvant être identique ou non identique à la fonction M et la sommation indiquée par le signe Σ s'étendant à tous les systèmes de fonctions de Lamé M et M_1,

Mais si l'on tient compte de l'équation:

$$\int lMNM_1N_1 d\omega = 0, \qquad (M \gtrless M_1)$$

il viendra simplement:

$$T = \frac{1}{2}\sum \left[\frac{d\xi^2}{dt^2} R \frac{dR}{d\rho} \sqrt{(\rho^2 - b^2)(\rho^2 - c^2)} \int lM^2N^2 d\omega\right].$$

Soit maintenant U l'énergie potentielle de la masse fluide dans une position quelconque et U_0 la valeur de cette énergie dans la position d'équilibre. Nous avons vu au § 9 que l'on a:

$$U = U_0 - 2\pi \sum A^2 \left(gl - \frac{RS}{2n+1}\right) \int lM^2N^2 d\omega.$$

Ici n désigne l'ordre de la fonction R, g est la force normale qui agit en un point quelconque de la surface de l'ellipsoïde. Enfin on suppose que le déplacement d'une molécule quelconque de cette surface, estimé normalement à l'ellipsoïde a pour expression

$$\Sigma AlMN.$$

Dans le cas qui nous occupe, ce déplacement est égal à $\frac{d\varphi}{dn}$ ou à:

$$\sum \xi MN \frac{dR}{d\rho}\frac{d\rho}{dn} = \sum \xi lMN \frac{dR}{d\rho}\sqrt{(\rho^2 - b^2)(\rho^2 - c^2)}$$

d'où

$$A = \xi \frac{dR}{d\rho}\sqrt{(\rho^2 - b^2)(\rho^2 - c^2)}$$

et:

$$U = U_0 - \sum 2\pi\xi^2 \frac{dR^2}{d\rho^2}(\rho^2 - b^2)(\rho^2 - c^2)\left(gl - \frac{RS}{2n+1}\right)\int lM^2N^2 d\omega.$$

Les équations du mouvement seront:

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{dT}{d\left(\frac{d\xi}{dt}\right)}\right] = \frac{dU}{d\xi}$$

ce qui donne

$$(1) \qquad \frac{d^2\xi}{dt^2}R = -4\pi\xi\frac{dR}{d\rho}\sqrt{(\rho^2 - b^2)(\rho^2 - c^2)}\left(gl - \frac{RS}{2n+1}\right).$$

Cette équation montre, ce que nous savions déjà, que l'équilibre est stable pourvu que tous les coëfficients:

$$gl - \frac{RS}{2n+1}$$

soient positifs, et elle nous apprend en même temps à calculer les périodes des oscillations infiniment petites de notre masse fluide.

Avant d'aller plus loin, nous allons calculer en restant dans l'hypothèse précédente, le moment de la quantité de mouvement par rapport à l'axe des z. Nous représenterons ce moment par la lettre M.

Nous aurons:

$$M = M_1 + M_2 = \int\left[(y + \partial y)\frac{d\partial x}{dt} - (x + \partial x)\frac{d\partial y}{dt}\right] dx\,dy\,dz$$

où

$$M_1 = \int\left(y\,\frac{d^2\varphi}{dx\,dt} - x\,\frac{d^2\varphi}{dy\,dt}\right) dx\,dy\,dz$$

$$M_2 = \int\left(\frac{d\varphi}{dy}\,\frac{d^2\varphi}{dx\,dt} - \frac{d\varphi}{dx}\,\frac{d^2\varphi}{dy\,dt}\right) dx\,dy\,dz.$$

Le premier terme M_1 peut se calculer immédiatement. Le théorème de Green donne en effet:

$$M_1 = \int\frac{d\varphi}{dt}\,d\omega(y\cos\alpha - x\cos\beta)$$

$d\omega$ désignant toujours un élément de la surface de l'ellipsoïde, et $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ étant les cosinus directeurs de la normale.

On trouve alors:

$$y\cos\alpha - x\cos\beta = klM_2N_2$$

où M_2 et N_2 désignent comme dans le paragraphe précédent deux fonctions de Lamé conjuguées:

$$\mu\sqrt{\mu^2 - b^2} \quad \text{et} \quad \nu\sqrt{b^2 - \nu^2}$$

et k un coëfficient dépendant seulement de ρ et égal à:

$$-c\sqrt{c^2 - b^2}\sqrt{\rho^2 - c^2}.$$

Si l'on appelle ξ_2 le coëfficient de $R_2M_2N_2$ dans l'expression de φ, il reste simplement:

$$M_1 = -k\frac{d\xi_2}{dt}R_2\int lM_2^2N_2^2\,d\omega.$$

Calculons maintenant M_2; le théorème de Green nous donnera encore:

$$M_2 = \int\frac{d\varphi}{dt}\,d\omega\left(\frac{d\varphi}{dy}\cos\alpha - \frac{d\varphi}{dx}\cos\beta\right).$$

Nous allons nous occuper de calculer le facteur:

$$F = \frac{d\varphi}{dy}\cos\alpha - \frac{d\varphi}{dx}\cos\beta.$$

Nous remarquerons pour cela que si l'on pose avec LIOUVILLE:

$$P = l\rho\sqrt{\rho^2 - b^2}\sqrt{\rho^2 - c^2}$$

on a:

$$\cos\alpha = \frac{Px}{\rho^2}, \qquad \cos\beta = \frac{Py}{\rho^2 - b^2}, \qquad \cos\gamma = \frac{Pz}{\rho^2 - c^2}$$

ce qui donne:

$$F = l\sqrt{\rho^2 - c^2}\left(\frac{x\sqrt{\rho^2 - b^2}}{\rho}\frac{d\varphi}{dy} - \frac{y\rho}{\sqrt{\rho^2 - b^2}}\frac{d\varphi}{dx}\right).$$

Nous pouvons encore exprimer F d'une autre manière. Donnons à x, y et z des accroissements

$$\delta x = -\,\delta s\frac{y}{\rho^2 - b^2}, \qquad \delta y = \delta s\frac{x}{\rho^2}, \qquad \delta z = 0$$

il en résultera pour la fonction φ un accroissement $\delta\varphi$ et l'on aura:

$$F = l\rho\sqrt{(\rho^2 - b^2)(\rho^2 - c^2)}\frac{\delta\varphi}{\delta s}.$$

Il importe de remarquer que si le point (x, y, z) est sur l'ellipsoïde, il en est de même du point infiniment voisin $(x + \delta x,\ y + \delta y,\ z + \delta z)$.

Nous allons maintenant utiliser une remarque de LIOUVILLE, grâce à laquelle les fonctions de LAMÉ peuvent être ramenées aux fonctions sphériques.

Soit $\varphi = RMN$ le produit de trois fonctions de LAMÉ conjuguées d'ordre n. Changeons de variables en posant:

$$X = \frac{x}{\rho}, \qquad Y = \frac{y}{\sqrt{\rho^2 - b^2}}, \qquad Z = \frac{z}{\sqrt{\rho^2 - c^2}}.$$

Si le point (x, y, z) se trouve sur l'ellipsoïde

$$\frac{x^2}{\rho^2} + \frac{y^2}{\rho^2 - b^2} + \frac{z^2}{\rho^2 - c^2} = 1$$

le point correspondant (X, Y, Z) se trouvera sur la sphère:

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = 1$$

et pour tous les points de cette sphère, la fonction φ sera égale à une constante multipliée par une fonction sphérique de degré n. Nous pourrons écrire

$$\varphi = \varepsilon . \psi$$

ψ étant un polynôme homogène de degré n en X, Y et Z et satisfaisant à l'équation:

$$\frac{d^2\psi}{dX^2} + \frac{d^2\psi}{dY^2} + \frac{d^2\psi}{dZ^2} = 0$$

et ε étant une fonction de X, Y et Z qui est constante en tous les points de la sphère de rayon 1.

Nous aurons d'autre part:

$$\partial X = \frac{\partial x}{\rho} = -\partial s \frac{y}{\rho(\rho^2 - b^2)} = -\partial s \frac{Y}{\rho\sqrt{\rho^2 - b^2}}$$

et de même:

$$\partial Y = \partial s \frac{X}{\rho\sqrt{\rho^2 - b^2}}, \qquad \partial Z = 0.$$

On aura dans les mêmes conditions:

$$\partial\varepsilon = 0, \qquad \partial\varphi = \varepsilon\partial\psi = \varepsilon\left(\frac{d\psi}{dX}\partial X + \frac{d\psi}{dY}\partial Y\right)$$

d'où:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial s} = \frac{\varepsilon}{\rho\sqrt{\rho^2 - b^2}}\left(X\frac{d\psi}{dY} - Y\frac{d\psi}{dX}\right)$$

et enfin:

$$F = l\varepsilon\sqrt{\rho^2 - c^2}\left(X\frac{d\psi}{dY} - Y\frac{d\psi}{dX}\right).$$

Il est aisé de vérifier que si ψ est un polynôme homogène de degré n, en x, y et z satisfaisant à l'équation:

$$\frac{d^2\psi}{dX^2} + \frac{d^2\psi}{dY^2} + \frac{d^2\psi}{dZ^2} = 0$$

il en sera de même de:

$$X\frac{d\psi}{dY} - Y\frac{d\psi}{dX}.$$

Il en résulte que si φ est égal à une constante multipliée par le produit de trois fonctions de LAMÉ conjuguées et d'ordre n, F sera de la forme suivante:

$$F = l(\alpha_1 M_1' N_1' + \alpha_2 M_2' N_2' + \ldots + \alpha_p M_p' N_p').$$

Dans cette expression, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ sont des quantités qui restent constantes *sur toute la surface de notre ellipsoïde* et M_1', N_1'; M_2', N_2'; ...; M_p', N_p' sont des systèmes de fonctions de LAMÉ conjuguées et *qui sont toutes d'ordre* n.

Nous dirons pour abréger qu'une somme de la forme:

$$\alpha_1 M_1' N_1' + \alpha_2 M_2' N_2' + \ldots + \alpha_p M_p' N_p'$$

est une somme de LAMÉ d'ordre n.

Si alors nous avons, comme nous l'avons supposé plus haut:

$$\varphi = \Sigma \xi_i R_i M_i N_i$$

il viendra:

$$F = l \Sigma \xi_i H_i$$

H_i étant une somme de LAMÉ de même ordre que les fonctions R, M, N. Ainsi les coëfficients d'une même indéterminée ξ seront de même ordre dans l'expression de φ et dans celle de F.

Il vient alors:

$$M_2 = \int F\frac{d\varphi}{dt}d\omega = \sum R_k \xi_i \frac{d\xi_k}{dt}\int l H_i M_k N_k d\omega.$$

Remarquons que l'intégrale:

$$\int l H_i M_k N_k d\omega$$

est nulle si les sommes H_i et $M_k N_k$ ne sont pas de même ordre.

Nous dirons pour abréger que l'indéterminée ξ_i est de rang n si les fonctions R_i, M_i et N_i sont d'ordre n.

Il résulte de ce qui précède que l'on a:

$$M_2 = \sum A_{ik}\xi_i \frac{d\xi_k}{dt}$$

les A_{ik} étant des coëfficients constants qui sont nuls si les indéterminées ξ_i et ξ_k ne sont pas de même rang.

Nous ne nous sommes occupés jusqu'ici que des petits mouvements absolus d'un ellipsoïde rapporté à deux axes fixes. Passons maintenant au cas des petits mouvements relatifs d'un ellipsoïde fluide rapporté à un système d'axes mobiles tournant avec une vitesse uniforme ω autour de l'axe des z.

Envisageons les équations générales de l'hydrodynamique:

$$\frac{du}{dt} + u\frac{du}{dx} + v\frac{du}{dy} + w\frac{du}{dz} = X - \frac{dp}{dx}$$

où u, v, w désignent les composantes de la vitesse; X, Y, Z les composantes de la force; p la pression, et où la densité de fluide est prise pour unité. Nous aurons d'ailleurs:

$$X = \frac{dV}{dx} - 2\omega v, \qquad Y = \frac{dV}{dy} + 2\omega u, \qquad Z = \frac{dV}{dz}$$

où V représente le potentiel des forces et où $-\omega v$ et ωu sont les composantes de la force centrifuge composée. Si nous posons:

$$V - p = \psi$$

et si nous négligeons le carré de u, v, w en observant que les mouvements doivent être très petits, il viendra:

$$(2)\qquad \begin{aligned} \frac{du}{dt} + 2\omega v &= \frac{d\psi}{dx} \\ \frac{dv}{dt} - 2\omega u &= \frac{d\psi}{dy} \\ \frac{dw}{dt} \qquad &= \frac{d\psi}{dz} \end{aligned}$$

avec l'équation de continuité:

$$\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} = 0.$$

On en tire aisément:

$$(3) \qquad \frac{d^2 \Delta \psi}{dt^2} = 4\omega^2 \frac{d^2 \psi}{dz^2}.$$

Cette équation ne suffit pas pour déterminer la fonction ψ. Il faut pour achever de connaître cette fonction, tenir compte de cette circonstance que la pression doit être nulle sur toute la surface libre. On doit donc avoir sur cette surface:

$$\psi = V.$$

Pour pousser plus loin cette analyse, envisageons séparément un des mouvements élémentaires dans lesquels on peut décomposer tous les petits mouvements de l'ellipsoïde. Soient δx, δy, δz les déplacements infiniment petits d'une molécule et écrivons:

$$\delta x = e^{i\lambda t}\xi, \qquad \delta y = e^{i\lambda t}\eta, \qquad \delta z = e^{i\lambda t}\zeta$$

ξ, η et ζ ne dépendant que de x, y et z. Les équations (2) et (3) deviendront alors:

$$(4) \qquad \begin{aligned} -\xi\lambda^2 + 2\omega i\lambda\eta &= \frac{d\psi_1}{dx} \\ -\eta\lambda^2 + 2\omega i\lambda\xi &= \frac{d\psi_1}{dy} \\ -\zeta\lambda^2 \qquad\qquad &= \frac{d\psi_1}{dz} \end{aligned} \qquad (\psi = e^{i\lambda t}\psi_1)$$

$$\frac{d^2\psi_1}{dx^2} + \frac{d^2\psi_1}{dy^2} + \left(1 - \frac{4\omega^2}{\lambda^2}\right)\frac{d^2\psi_1}{dz^2} = 0$$

où ψ_1 ne dépend que de x, y et z.

Voyons maintenant ce que devient la condition relative à la surface libre.

Soient $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ les trois cosinus directeurs de la normale en un point de l'ellipsoïde et supposons que l'on ait en tous les points de cette surface

$$\xi\cos\alpha + \eta\cos\beta + \zeta\cos\gamma = \Sigma A_k l M_k N_k$$

le second membre étant une série développée suivant les produits $M_k N_k$ de deux fonctions de Lamé conjuguées. Une formule du § 9 nous donnera, en tous les points de la surface libre

$$V = -4\pi e^{i\lambda t}\sum A_k\left(\frac{R_1 S_1}{3} - \frac{R_k S_k}{2n+1}\right) M_k N_k.$$

L'équation $\psi = V$ se réduit donc à:

$$\psi_1 = -4\pi\sum A_k\left(\frac{R_1 S_1}{3} - \frac{R_k S_k}{2n+1}\right) M_k N_k. \tag{5}$$

D'autre part les équations (4) nous donnent:

$$\xi = -\frac{\frac{d\psi_1}{dx}\lambda + 2\frac{d\psi_1}{dy}\omega i}{\lambda(\lambda^2 - 4\omega^2)}, \qquad \eta = -\frac{\frac{d\psi_1}{dy}\lambda - 2\frac{d\psi_1}{dx}\omega i}{\lambda(\lambda^2 - 4\omega^2)}, \qquad \zeta = -\frac{\frac{d\psi_1}{dz}}{\lambda^2}$$

d'où

$$\frac{\lambda(4\omega^2 - \lambda^2)}{l}(\xi\cos\alpha + \eta\cos\beta + \zeta\cos\gamma)$$

$$= \lambda\left[\frac{d\psi_1}{dx}\frac{\cos\alpha}{l} + \frac{d\psi_1}{dy}\frac{\cos\beta}{l} + \frac{d\psi_1}{dz}\left(1 - \frac{\omega^2}{\lambda^2}\right)\frac{\cos\gamma}{l}\right] + 2\omega i\left[\frac{d\psi_1}{dy}\frac{\cos\alpha}{l} + \frac{d\psi_1}{dx}\frac{\cos\beta}{l}\right].$$

Mais nous avons trouvé plus haut:

$$\frac{\cos\alpha}{l} = \rho\sqrt{\rho^2 - b^2}\sqrt{\rho^2 - c^2}\frac{x}{\rho^2}$$

$$\frac{\cos\beta}{l} = \rho\sqrt{\rho^2 - b^2}\sqrt{\rho^2 - c^2}\frac{y}{\rho^2 - b^2}$$

$$\frac{\cos\gamma}{l} = \rho\sqrt{\rho^2 - b^2}\sqrt{\rho^2 - c^2}\frac{z}{\rho^2 - c^2}$$

d'où:

$$\frac{\lambda(4\omega^2 - \lambda^2)}{l\rho\sqrt{\rho^2 - b^2}\sqrt{\rho^2 - c^2}}(\xi\cos\alpha + \eta\cos\beta + \zeta\cos\gamma)$$

$$= \lambda\left[\frac{d\psi_1}{dx}\frac{x}{\rho^2} + \frac{d\psi_1}{dy}\frac{y}{\rho^2 - b^2} + \frac{d\psi_1}{dz}\left(1 - \frac{\omega^2}{\lambda^2}\right)\frac{z}{\rho^2 - c^2}\right] + 2\omega i\left[\frac{d\psi_1}{dy}\frac{x}{\rho^2} - \frac{d\psi_1}{dx}\frac{y}{\rho^2 - b^2}\right]$$

ou enfin

$$(6)\qquad \lambda\left[\frac{d\psi_1}{dx}\frac{x}{\rho^2}+\frac{d\psi_1}{dy}\frac{y}{\rho^2-b^2}+\frac{d\psi_1}{dz}\left(1-\frac{4\omega^2}{\lambda^2}\right)\frac{z}{\rho^2-c^2}\right]$$

$$+\ 2\omega i\left[\frac{d\psi_1}{dy}\frac{x}{\rho^2}-\frac{d\psi_1}{dx}\frac{y}{\rho^2-b^2}\right]=\frac{\lambda(4\omega^2-\lambda^2)}{\rho\sqrt{\rho^2-b^2}\sqrt{\rho^2-c^2}}\sum A_k M_k N_k.$$

Le problème est donc ramené à trouver une fonction ψ_1 qui satisfasse à la dernière des équations (4) à l'intérieur de l'ellipsoïde et aux équations (5) et (6) sur la surface de l'ellipsoïde.

Supposons donc d'abord que ω soit nul; la dernière équation (4) se réduira à

$$\Delta\psi_1 = 0$$

de sorte que nous satisferons à la fois aux équations (4) et (5) en faisant:

$$\psi_1 = 4\pi\sum A_k\left(\frac{R_1^0S_1^0}{3}-\frac{R_k^0S_k^0}{2n+1}\right)\frac{R_kM_kN_k}{R_k^0}.$$

Dans cette expression R_k^0 est la valeur que prend R_k sur la surface de l'ellipsoïde.

De cette expression, on déduira pour tous les points de la surface de l'ellipsoïde:

$$\frac{d\psi_1}{dx}\frac{x}{\rho^2}+\frac{d\psi_1}{dy}\frac{y}{\rho^2-b^2}+\frac{d\psi_1}{dz}\frac{z}{\rho^2-c^2}=4\pi\sum A_k\left(\frac{R_1S_1}{3}-\frac{R_kS_k}{2n+1}\right)\frac{\frac{dR_k}{d\rho}}{\rho R_k}M_kN_k$$

de sorte que l'équation (6) se réduit à:

$$-\ 4\pi\lambda\sum A_k\left(\frac{R_1S_1}{3}-\frac{R_kS_k}{2n+1}\right)\frac{\frac{dR_k}{d\rho}}{\rho R_k}M_kN_k=\frac{-\lambda^3}{\rho\sqrt{(\rho^2-b^2)(\rho^2-c^2)}}\sum A_kM_kN_k.$$

Pour que cette équation soit satisfaite, il faut et il suffit que tous les coëfficients A_k soient nuls, excepté un que nous appellerons A_p, et que λ satisfasse à l'équation:

$$4\pi\left(\frac{R_1S_1}{3}-\frac{R_pS_p}{2n+1}\right)\frac{dR_p}{d\rho}\sqrt{(\rho^2-b^2)(\rho^2-c^2)}-\lambda^2R_p=0.$$

On est donc ainsi conduit pour les périodes des diverses petites oscillations possibles aux mêmes valeurs que par l'équation (1).

Nous allons maintenant supposer que ω n'est pas nul.

Posons

$$1-\frac{4\omega^2}{\lambda^2}=\tau^2, \qquad z=\tau z'$$

la dernière des équations (4) deviendra:

$$\frac{d^2\psi_1}{dx^2}+\frac{d^2\psi_1}{dy^2}+\frac{d^2\psi_1}{dz'^2}=0.$$

Quand le point (x, y, z) décrira l'ellipsoïde E qui a pour équation:

$$\frac{x^2}{\rho^2}+\frac{y^2}{\rho^2-b^2}+\frac{z^2}{\rho^2-c^2}=1$$

le point (x, y, z') décrira l'ellipsoïde E' qui a pour équation:

$$\frac{x^2}{\rho^2}+\frac{y^2}{\rho^2-b^2}+\frac{\tau^2 z'^2}{\rho^2-c^2}=1.$$

Nous appellerons R', M' et N' les fonctions de Lamé formées à l'aide de l'ellipsoïde E', et l' la quantité qui joue par rapport à l'ellipsoïde E' le même rôle que l joue par rapport à l'ellipsoïde E.

Nous appellerons $\cos\alpha'$, $\cos\beta'$, $\cos\gamma'$ les cosinus directeurs de la normale en un point de la surface de E'. Nous poserons de même:

$$\rho^2-c'^2=\frac{\rho^2-c^2}{\tau^2}$$

et

$$P'=l'\rho\sqrt{(\rho^2-b^2)(\rho^2-c'^2)}$$

de même que l'on a, d'après les notations de Liouville:

$$P=l\rho\sqrt{(\rho^2-b^2)(\rho^2-c^2)}.$$

Il viendra alors pour un point de la surface de E':

$$\frac{\cos\alpha'}{P'}=\frac{x}{\rho^2}, \qquad \frac{\cos\beta'}{P'}=\frac{y}{\rho^2-b^2}, \qquad \frac{\cos\gamma'}{P'}=\frac{z}{\rho^2-c'^2}=\frac{\tau^2 z}{\rho^2-c^2}$$

d'où:

$$\frac{d\psi_1}{dx}\frac{x}{\rho^2}+\frac{d\psi_1}{dy}\frac{y}{\rho^2-b^2}+\frac{d\psi_1}{dz}\frac{\tau^2 z}{\rho^2-c^2}=\frac{1}{P'}\left(\frac{d\psi_1}{dx}\cos\alpha'+\frac{d\psi_1}{dy}\cos\beta'+\frac{d\psi_1}{dz'}\cos\gamma'\right)$$

$$\frac{d\psi_1}{dy}\frac{x}{\rho^2}-\frac{d\psi_1}{dx}\frac{y}{\rho^2-b^2}=\frac{1}{P'}\left(\frac{d\psi_1}{dy}\cos\alpha'-\frac{d\psi_1}{dx}\cos\beta'\right).$$

Considérons maintenant un point quelconque de l'ellipsoïde E ayant pour coordonnées elliptiques μ et ν et pour coordonnées ordinaires x, y et z; considérons ensuite le point correspondant de l'ellipsoïde E' ayant pour coordonnées ordinaires x, y et $z'=\frac{z}{\tau}$ et pour coordonnées elliptiques μ' et ν' (dans le système dérivé de l'ellipsoïde E'). Soit M'_q une fonction quelconque de Lamé de la coordonnée μ' et N'_q la fonction conjuguée de la coordonnée ν'. A chaque point de E correspond comme nous l'avons vu un point de E' et réciproquement. A chaque système de valeurs de μ et ν correspond donc un système de valeurs de μ' et ν' et réciproquement, de sorte que le produit $M'_qN'_q$ qui dépend de μ' et ν' pourra aussi être regardé comme fonction de μ et ν; à ce titre, il pourra être développé en une série ordonnée suivant les produits de Lamé M_kN_k dérivés de l'ellipsoïde E. On aura donc:

$$M'_qN'_q=\Sigma B_{k,q}M_kN_k. \tag{7}$$

Nous allons maintenant, à l'aide de la remarque de Liouville dont nous avons déjà fait usage plus haut, montrer que dans le second membre de l'identité (7) n'entrent que des fonctions de Lamé de même ordre que M'_q.

En effet, d'après cette remarque de Liouville si l'on pose:

$$X=\frac{x}{\rho},\qquad Y=\frac{y}{\sqrt{\rho^2-b^2}},\qquad Z=\frac{z}{\sqrt{\rho^2-c^2}}=\frac{z'}{\sqrt{\rho^2-c'^2}}$$

le produit $M'_qN'_q$ sera sur la sphère:

$$X^2+Y^2+Z^2=1$$

une fonction sphérique de même ordre que M'_q et le produit M_kN_k une fonction sphérique de même ordre que M_k. L'identité (7) ne peut donc subsister que si toutes les fonctions de Lamé qui entrent dans le second membre sont de même ordre que M'_q.

Ce second membre n'est donc pas une série infinie, mais un polynôme formé d'un nombre fini de termes.

De plus dans ce second membre ne peuvent entrer que des fonctions de LAMÉ présentant les mêmes symétries que M'_q. Si par exemple M'_q est divisible par $\sqrt{\mu^2 - b^2}$, il devra en être de même de toutes les fonctions M_k.

Nous renverserons l'identité (7) en écrivant:

$$M_k N_k = \sum C_{k,q} M'_q N'_q.$$

La fonction ψ_1 devant satisfaire à la dernière des équations (4) pourra s'écrire:

$$\psi_1 = \sum D_q R'_q M'_q N'_q$$

les D_q étant des coëfficients constants et les R'_q, M'_q, N'_q étant des fonctions de LAMÉ dérivées de l'ellipsoïde E'.

A la surface de cet ellipsoïde, nous aurons:

$$\psi_1 = \sum\sum D_q B_{k,q} R'_q M_k N_k$$

en tenant compte de (7), de sorte que l'équation (5) se ramènera aux équations:

$$(8) \qquad -4\pi A_k\left(\frac{R_1 S_1}{3} - \frac{R_k S_k}{2n+1}\right) = \sum_q D_q B_{k,q} R'_q.$$

On a d'autre part à la surface de E':

$$\frac{1}{P'}\left(\frac{d\psi_1}{dx}\cos\alpha' + \frac{d\psi_1}{dy}\cos\beta' + \frac{d\psi_1}{dz}\cos\gamma'\right) = \sum D_q \frac{dR'_q}{\rho d\rho} M'_q N'_q.$$

D'autre part il résulte de l'analyse faite plus haut à propos des moments des quantités de mouvement que l'on a sur toute la surface de E'

$$\frac{d(R'_q M'_q N'_q)}{dy}\frac{x}{\rho^2} - \frac{d(R'_q M'_q N'_q)}{dx}\frac{y}{\rho^2 - b^2} = \sum F_{q,k} M'_k N'_k$$

les F étant des constantes et les M'_k et N'_k des fonctions de LAMÉ de même ordre que M'_q, mais ne présentant pas les mêmes symétries. Si M'_q contient en facteur $\sqrt{\mu'^2 - c'^2}$ il en est de même de M'_k et réciproquement, mais si M'_q contient en facteur $\sqrt{\mu'^2 - b'^2}$, M'_k ne le contiendra pas et inversement.

Nous écrirons en tenant compte de (7)

$$\Sigma F_{q,k} M'_k N'_k = \Sigma G_{q,k} M_k N_k$$

ce qui donnera enfin:

$$\frac{d\psi_1}{dy}\frac{x}{\rho^2} - \frac{d\psi_1}{dx}\frac{y}{\rho^2 - b^2} = \Sigma\Sigma D_q G_{q,k} M_k N_k.$$

L'équation (6) se ramène alors aux égalités:

$$\frac{A_k \lambda(4\omega^2 - \lambda^2)}{\rho\sqrt{\rho^2 - b^2}\sqrt{\rho^2 - c^2}} = \lambda \Sigma_q D_q B_{k,q} \frac{dR'_q}{\rho d\rho} + 2\omega i \Sigma_q D_q G_{q,k}. \tag{9}$$

Il s'agit maintenant de disposer de λ, des D_q et des A_k de façon à satisfaire aux égalités (8) et (9).

Or on pourra arriver à ce résultat en supposant d'abord que tous les A_k et tous les D_q sont nuls, sauf ceux qui se rapportent à des fonctions de Lamé d'un certain ordre, d'ordre n par exemple. Il restera alors $2n + 1$ équations (8) et $2n + 1$ équations (9) entre λ, les $2n + 1$ coëfficients A_k et les $2n + 1$ coëfficients D_q qui se rapportent aux fonctions de Lamé d'ordre n et qui par conséquent ne sont pas nuls, d'après la convention précédente. Cela fait en tout $4n + 2$ équations linéaires et homogènes par rapport aux $4n + 2$ coëfficients A_k et D_q.

Si on élimine ces $4n + 2$ coëfficients entre ces $4n + 2$ équations par le moyen d'un déterminant, on obtiendra une équation qui déterminera les périodes λ des oscillations infiniment petites de l'ellipsoïde. Il importe de remarquer que λ n'entrera pas dans cette équation seulement explicitement, mais que les coëfficients $B_{k,q}$, $G_{q,k}$, $\frac{dR'_q}{d\rho}$, R'_q qui entrent également dans cette équation dépendent de λ. Néanmoins, même en tenant compte de cette circonstance, l'équation est algébrique en λ.

Il y aura une infinité de pareilles équations en λ que l'on obtiendra en considérant successivement les fonctions de Lamé du 2^d, du 3^{me}, ..., du n^e ordre, etc. Pour la stabilité il faut et il suffit qu'aucune de ces équations n'ait de racine imaginaire.

Ce qu'il faut surtout retenir, c'est que dans un même système d'équations (8) et (9) n'entrent que les coëfficients qui se rapportent aux fonctions de LAMÉ d'un même ordre.

Si donc nous écrivons la valeur de ψ relative à une oscillation infiniment petite obtenue en considérant l'une des solutions d'un système d'équations (8) et (9), on trouvera:

$$\psi = e^{\lambda i t} \sum D_q M'_q N'_q R'_q.$$

Dans la somme du second membre n'entrent que des fonctions de LAMÉ d'un même ordre, d'ordre n par exemple. Une pareille oscillation infiniment petite s'appellera un mouvement harmonique d'ordre n.

Il résulte de ce qui précède que deux mouvements harmoniques d'ordres différents sont indépendants l'un de l'autre, c'est à dire que l'on peut imposer à la masse fluide, comme liaison, la condition de ne pouvoir éprouver d'autres déplacements que des mouvements harmoniques d'ordre n sans que les $2n + 1$ mouvements harmoniques d'ordre n possibles soient altérés.

Nous pouvons encore énoncer ce résultat d'une autre manière.

Dans un mouvement harmonique d'ordre n, on a sur la surface de l'ellipsoïde de E:

$$V = \psi = e^{\lambda i t} \sum A_k M_k N_k$$

M_k et N_k étant des fonctions de LAMÉ d'ordre n et les A_k des coëfficients constants. Sur la surface de cet ellipsoïde, le potentiel V s'exprime donc par une somme de LAMÉ d'ordre n.

Imposons-nous donc la liaison suivante: que les déplacements de notre masse fluide soient toujours tels que le potentiel s'exprime à la surface libre par une somme de LAMÉ d'ordre n. En tenant compte de cette liaison, on trouvera que certaines petites oscillations de la masse sont possibles. On cherchera tous les systèmes d'oscillations possibles en supposant que la valeur de V à la surface soit assujettie à être une somme de LAMÉ d'ordre $2, 3, \ldots, n, \ldots$, ad inf.; on composera ensuite tous ces systèmes d'oscillations, d'après la règle ordinaire de la composition des petits mouvements, et on obtiendra de la sorte tous les petits mouvements possibles du système, en le supposant délivré de toutes ses liaisons.

Mais il y a plus. J'ai dit que dans une même équation (8) ou dans une même équation (9) ne peuvent entrer que des coëfficients A_k et D_q se rapportant à des fonctions de LAMÉ d'un même ordre. On peut ajouter que dans une même équation (8) ou dans une même équation (9) ne peuvent entrer que des A_k et des D_q se rapportant tous à des fonctions de LAMÉ qui ont comme facteur $\sqrt{c^2-\mu^2}$ ou $\sqrt{c'^2-\mu'^2}$; ou bien des A_k et des D_q se rapportant tous à des fonctions de LAMÉ qui n'admettent pas ce facteur. Si la fonction M_k ne contient pas le facteur $\sqrt{c^2-\mu^2}$, le produit M_kN_k est symétrique par rapport au plan des xy; (c'est à dire qu'il ne change pas quand on change z en $-z$) il ne l'est pas dans le cas contraire.

Voici quelle est la conséquence de ce fait. Supposons que l'on cherche à trouver tous les mouvements harmoniques possibles d'ordre n que nous appellerons H. Imposons-nous d'abord la liaison suivante: que la valeur superficielle de V soit une somme de LAMÉ d'ordre n et symétrique par rapport au plan des xy. Nous trouverons qu'en tenant compte de cette liaison, il y a certaines oscillations possibles H'. Imposons-nous maintenant une autre liaison: que la valeur superficielle de V soit une somme de LAMÉ d'ordre n et change de signe avec z. En tenant compte de cette liaison, il y aura certaines oscillations possibles H''. Si nous composons ensuite les oscillations H' et H'' d'après la règle ordinaire de la composition des petits mouvements, nous aurons tous les mouvements H possibles.

Ces règles permettent d'envisager séparément les mouvements harmoniques d'ordre n sans tenir compte des mouvements harmoniques d'ordre différent qui pourraient exister simultanément.

Un cas particulier où les équations (8) et (9) se simplifient considérablement, c'est celui où l'ellipsoïde E et par conséquent l'ellipsoïde E' sont de révolution. Il arrive alors que tous les coëfficients $B_{k,q}$ sont nuls quand k est différent de q et que l'on peut prendre:

$$B_{k,k} = 1, \qquad G_{q,k} = F_{q,k}.$$

Une dernière remarque: pour que l'analyse précédente puisse s'appliquer, il faut, à ce que l'on croit d'abord, que l'on ait:

$$0 < \frac{\rho^2 - c^2}{\tau^2} < \rho^2 - b^2$$

ce qui obligerait λ à rester compris entre certaines limites. Cependant il est aisé de voir que ces résultats subsistent quelle que soit l'hypothèse faite sur la valeur de λ. En effet il semble d'abord que les fonctions de LAMÉ R', M' et N' ne sont définies que lorsque les axes de l'ellipsoïde E', d'où elles dérivent, sont réels et si l'axe des z est le petit axe dans E' comme dans E. Mais le produit $R'M'N'$ est un polynôme entier en x, y et z qui est parfaitement défini dans tous les cas possibles et qui jouit toujours des mêmes propriétés.

Si même $\lambda > 2\omega$, c'est à dire si τ^2 est négatif et si l'un des axes de E' devient imaginaire, les résultats de l'analyse précédente subsistent encore.

§ 14. *Stabilité des ellipsoïdes.*

Pour reconnaître si un ellipsoïde de révolution ou un ellipsoïde de JACOBI est stable, il faut se reporter au § 7. D'après la règle de ce paragraphe, qui était soumise, je le rappelle, à certaines restrictions, une figure d'équilibre ne peut jouir de la stabilité séculaire qu'à la condition que tous les coëfficients de stabilité soient négatifs. Si cette règle était applicable sans modifications à l'ellipsoïde de JACOBI, cette figure n'aurait jamais la stabilité séculaire, car un de ses coëfficients de stabilité est toujours positif; c'est celui qui se rapporte à la fonction $R'_{0,2}$. Mais la règle du § 7 n'est applicable, comme nous l'avons vu, que si dans tous les mouvements possibles le travail des résistances passives est toujours négatif sans pouvoir jamais être nul. Ce n'est pas le cas si l'on envisage une masse fluide isolée dans l'espace, car si une pareille masse se déplace sans se déformer, il n'y a pas de résistance passive. Si au contraire la rotation de la masse fluide était déterminée par celle d'un axe rigide qui la traverserait de part en part et qui l'entraînerait par frottement (comme dans les expériences de PLATEAU par exemple), tout déplacement produirait une résistance passive et l'ellipsoïde de JACOBI serait toujours instable.

Mais ce cas est sans intérêt. Envisageons donc une masse isolée dans l'espace et voyons comment doit être modifiée la règle du § 7.

Considérons deux systèmes d'axes: un système fixe et un système mobile tournant avec une vitesse angulaire constante ω autour de l'axe des z. Supposons que la masse fluide ait une position d'équilibre relatif dans laquelle elle soit animée d'une vitesse de rotation ω par rapport aux axes fixes, et par conséquent en repos par rapport aux axes mobiles. Soit, dans cette position, I_0 son moment d'inertie par rapport à l'axe des z et U_0 son énergie potentielle par rapport aux axes fixes. Considérons maintenant une configuration de la masse fluide voisine de la figure d'équilibre et telle que cette masse cesse d'être en repos par rapport aux axes mobiles. Soient, dans cette nouvelle position, I et U les valeurs du moment d'inertie et de l'énergie potentielle. Soit T la demi-force vive relative par rapport aux axes mobiles; soit m la masse d'un des points du fluide; r sa distance à l'axe des z, et $\omega + \partial\omega$ sa vitesse angulaire autour de cet axe. Les équations de la conservation de l'énergie et de la conservation des moments des quantités de mouvement nous donneront:

$$T + \omega \Sigma m r^2 \partial\omega + \frac{\omega^2 I}{2} + U = \frac{\omega^2 I_0}{2} + U_0 + h$$

$$\omega I + \Sigma m r^2 \partial\omega = \omega I_0$$

(h étant une constante qui est très petite si les déplacements initiaux et les vitesses initiales sont très petits ce que nous supposons) d'où:

$$T - \frac{\omega^2 I}{2} + U = U_0 - \frac{\omega^2 I_0}{2} + h.$$

Mais on a:

$$T > \frac{1}{2} \Sigma m r^2 \partial\omega^2 > \frac{1}{2} \frac{(\Sigma m r^2 \partial\omega)^2}{\Sigma m r^2} = \frac{\omega^2}{2} \frac{(I - I_0)^2}{I}$$

d'où

$$U - U_0 - \frac{\omega^2}{2}(I - I_0) + \frac{\omega^2}{2} \frac{(I - I_0)^2}{I} < h.$$

Si donc on a pour toutes les configurations très voisines de la figure d'équilibre:

$$U - U_0 - \frac{\omega^2}{2}(I - I_0) + \frac{\omega^2}{2} \frac{(I - I_0)^2}{I} > 0, \tag{1}$$

on sera certain que l'équilibre est stable. S'il y a des résistances passives, h ne sera pas une constante, mais ira constamment en diminuant; donc *a fortiori,* il y aura encore stabilité si la condition (1) est remplie. Cette condition est donc ***suffisante*** pour qu'il y ait stabilité séculaire.

D'après la règle du § 7, la condition nécessaire et suffisante pour la stabilité séculaire était que l'expression

$$V - \frac{\omega^2 I}{2}$$

fût minimum, c'est à dire que:

$$U - U_0 - \frac{\omega^2}{2}(I - I_0) > 0.$$

On voit que la règle actuelle est plus favorable à la stabilité.

D'ailleurs la condition (1) peut encore s'énoncer d'une autre manière. Elle signifie que l'expression:

$$U + \frac{\omega^2}{2}\frac{I_0^2}{I} \tag{2}$$

doit être minimum pour la figure d'équilibre (Cf. TAIT et THOMSON, *Treatise on Natural Philosophy,* § 778″ [*j*] et [*k*]).

Il faut voir maintenant si cette condition (1) est nécessaire pour qu'il y ait stabilité séculaire. Nous avons vu au § 7 que les déplacements infiniment petits x_i des diverses molécules d'un système à partir d'une position d'équilibre relatif pouvaient s'exprimer de la façon suivante:

$$x_i = \Sigma A_m[i, m]e^{\lambda_m t}$$

les A_m étant des constantes arbitraires d'intégration, tandis que les $[i, m]$ et les λ_m sont des constantes dépendant des équations différentielles données.

Pour qu'il y ait stabilité séculaire, il faut que tous les λ aient leur partie réelle nulle ou négative.

Plaçons-nous d'abord dans les conditions où la règle du § 7 est applicable, c'est à dire où tout déplacement entraine une résistance passive. Tous les λ devront alors avoir leur partie réelle négative, et tous les x_i tendre vers 0 quand t croîtra indéfiniment. L'expression suivante:

$$\Phi = T + U - U_0 - \frac{\omega^2}{2}(I - I_0)$$

(si l'on néglige les cubes des x_i, ou ce qui revient au même les cubes des A_m) est une forme quadratique par rapport aux A_m.

Cette forme doit tendre vers o quand t croît indéfiniment. Mais d'après la nature même des résistances passives, cette forme doit aller constamment en diminuant. Il faut donc que sa valeur initiale soit toujours positive quelles que soient les constantes arbitraires A_m. La forme Φ est donc toujours définie positive, c'est à dire que $U - \frac{\omega^2}{2} I$ doit être minimum dans la position d'équilibre. C'est là la démonstration de la règle du § 7.

Supposons maintenant que cette règle ne soit plus applicable, c'est à dire que certains déplacements n'entraînent pas de résistances passives. Il pourra arriver alors s'il y a stabilité séculaire que parmi les λ_m, il y en ait un certain nombre que j'appellerai les λ_p et dont la partie réelle est nulle, pendant que d'autres que j'appellerai les λ_q auront leur partie réelle négative.

D'après cela la forme Φ ne tendra pas vers o, en général, quand t croîtra indéfiniment; elle partira de sa valeur initiale Φ_0 et tendra vers une certaine valeur limite Φ_1 que l'on obtiendra en remplaçant dans Φ_0 tous les A_q par o et en conservant aux A_p leurs valeurs initiales. Comme la forme Φ doit aller constamment en diminuant, on devra avoir:

$$\Phi_0 > \Phi_1$$

quelles que soient les valeurs des constantes arbitraires A_p et A_q. Pour cela il faut que la forme quadratique Φ soit la somme de deux autres, la première ne contenant que les A_p, la seconde *définie positive* et ne contenant que les A_q.

Si donc dans la forme Φ_0 on annule tous les A_p, cette forme deviendra définie positive.

Dans le cas qui nous occupe, et si nous supposons que le centre de gravité de notre masse soit fixe, il n'y a que trois déplacements qui n'entraînent pas de résistance passive, ce sont les rotations autour des trois axes. Il y a donc au plus six des λ_m dont la partie réelle est nulle; en d'autres termes, il y a au plus six A_p. En réalité, il n'y a que quatre A_p. On obtiendra tous les mouvements pour lesquels tous les A_q sont nuls, en supposant que les diverses molécules de la masse fluide tournent d'un mouvement uniforme, à la façon des différentes parties d'un même corps solide, autour d'un axe quelconque et avec une vitesse quelconque. On obtiendra tous les mouvements pour lesquels tous les A_p sont nuls, en considérant les déplacements de la masse fluide qui sont tels que le moment de la quantité de mouvement relatif par rapport aux axes mobiles soit nul. Pour qu'il y ait stabilité séculaire, il faut que la forme Φ soit toujours positive quand les déplacements initiaux et les vitesses initiales des diverses molécules sont telles que tous les A_p soient nuls, c'est à dire que le moment de la quantité de mouvement soit nul. Or il est aisé de voir que cela ne peut avoir lieu que si l'expression (2) est un minimum.

C'est donc là la condition nécessaire et suffisante de la stabilité séculaire.

L'expression:

$$U_0 - U - \frac{\omega^2}{2}(I_0 - I) = T - \Phi$$

est aussi une forme quadratique par rapport aux A_m quand on néglige les cubes de ces quantités. Cette forme peut être réduite en une somme de carrés et ce sont les coëfficients de ces carrés que nous avons appelés jusqu'ici coëfficients de stabilité. D'après ce qui précède, il convient maintenant d'envisager la forme:

$$F = U_0 - U - \frac{\omega^2}{2}(I_0 - I) - \frac{\omega^2}{2}\frac{(I - I_0)^2}{I}.$$

Cette forme peut aussi être réduite en une somme de carrés et j'appellerai les coëfficients de ces carrés coëfficients de stabilité corrigés. Ils devront être tous négatifs pour la stabilité séculaire.

Supposons que la forme d'équilibre relatif soit un ellipsoïde et que la figure troublée soit définie par la distance ζ d'un point de sa surface à l'ellipsoïde comptée normalement à l'ellipsoïde.

Si l'on a:

$$\zeta = \sum A_i l M_i N_i$$

nous avons vu au § 9 que les coëfficients de stabilité s'écrivent:

$$-\frac{4\pi}{2}\int\left(\frac{R_1 S_1}{3} - \frac{R_i S_i}{2n + 1}\right) l M_i^2 N_i^2 d\omega.$$

Il est aisé de voir que si l'on néglige le cube des A_i il viendra:

$$-\frac{\omega^2}{2}\frac{(I-I_0)^2}{I} = -(BA+B'A')^2$$

B et B' étant des coëfficients qui ne dépendent que des axes de l'ellipsoïde pendant que A et A' sont les coëfficients de:

$$lM^1_{0,2}N^1_{0,2} \quad \text{et} \quad lM^1_{2,2}N^1_{2,2}$$

dans l'expression de ζ.

Il résulte de là que les coëfficients de stabilité corrigés ne différeront pas des coëfficients de stabilité primitifs, si l'on excepte ceux qui se rapportent aux fonctions de LAMÉ:

$$R^1_{0,2} \quad \text{et} \quad R^1_{2,2}.$$

Or si l'on se reporte au paragraphe précédent, on verra que nous pouvons envisager séparément les mouvements harmoniques des divers ordres, et que pour qu'il y ait stabilité, il faut et il suffit que cette stabilité existe à la fois en ce qui concerne les mouvements harmoniques de chaque ordre.

Mais d'après ce que nous venons de dire des coëfficients de stabilité, la règle du § 7 s'appliquera aux mouvements harmoniques de tous les ordres si l'on excepte le second.

Pour qu'il y ait stabilité séculaire en ce qui concerne les mouvements du n^e ordre, il faut et il suffit que les coëfficients de stabilité corrigés qui se rapportent aux fonctions de LAMÉ du n^e ordre soient tous négatifs; or ils ne diffèrent pas des coëfficients primitifs si $n > 2$.

Considérons d'abord les mouvements du 2^d ordre; ils ne seront pas altérés comme nous l'avons vu, si nous nous imposons comme liaison la condition que ces mouvements soient seuls possibles. Cela revient à assujettir la figure de la masse fluide à la condition de rester toujours ellipsoïdale.

Pour que la stabilité soit séculaire, en tenant compte de cette liaison, il faut et il suffit que l'expression:

$$U + \frac{\omega^2 I_0^2}{2I} \tag{2}$$

soit plus grande pour un ellipsoïde quelconque que pour l'ellipsoïde d'équilibre.

L'expression ωI_0 est le moment de la quantité de mouvement; c'est une donnée de la question. Les quantités qui définiront l'ellipsoïde seront deux des axes, a et b; le troisième axe par rapport auquel on prendra les moments d'inertie sera fonction des deux premiers, puisque le volume est supposé donné.

A tout système de valeurs positives de a et b correspond une valeur de (2) qui tend vers une limite nulle ou positive quand l'un des axes a ou b tend vers 0 ou vers ∞ d'une manière quelconque.

Si donc on appelle $\mathfrak{N}_1$, $\mathfrak{N}_2$ et $\mathfrak{N}_3$ le nombre des minima *négatifs* de l'expression (2), celui des maxima négatifs, et celui des ellipsoïdes d'équilibre qui correspondent à une valeur négative de (2) qui n'est ni un maximum ni un minimum, on aura par simple raison de continuité et en vertu des principes bien connus de l'*Analysis Situs:*

$$\mathfrak{N}_1 + \mathfrak{N}_2 - \mathfrak{N}_3 = 1 \qquad (3)$$

$$\mathfrak{N}_1 > 0.$$

Pour les valeurs de ωI_0 qui sont inférieures à une certaine limite, il n'y a qu'un seul ellipsoïde d'équilibre qui est de révolution. Si les axes de cet ellipsoïde sont ρ, ρ et $\sqrt{\rho^2 - c^2}$, ces valeurs de ρ satisferont à l'inégalité:

$$\frac{R_1 S_1}{3} - \frac{R^1_{0,2} S^1_{0,2}}{5} > 0. \qquad (4)$$

J'appellerai un pareil ellipsoïde: *ellipsoïde peu aplati* pour le distinguer de ceux qui ne satisfont pas à l'inégalité (4).

Puisque nous n'avons qu'une seule figure d'équilibre, les inégalités (3) ne peuvent subsister que si cette figure correspond à un minimum.

Les ellipsoïdes peu aplatis sont donc stables en ce qui concerne les mouvements du 2[d] ordre.

Pour les valeurs plus grandes de ωI_0, il y a trois figures d'équilibre: un ellipsoïde de révolution ne satisfaisant pas à l'inégalité (4) (je dirai qu'il est *très aplati*) et deux ellipsoïdes de Jacobi égaux entre eux et ne différant l'un de l'autre que par la permutation de a et de b. Il faut donc que les deux ellipsoïdes de Jacobi correspondent tous deux à un minimum de (2) ou que cela ne soit vrai d'aucun des deux. Dans ces conditions, les inégalités (3) ne peuvent subsister que si les ellipsoïdes de JACOBI correspondent à un minimum et si l'ellipsoïde de révolution ne correspond ni à un maximum, ni à un minimum.

Donc en ce qui concerne les mouvements du 2[d] ordre, les ellipsoïdes de JACOBI sont toujours stables et les ellipsoïdes très aplatis toujours instables.

Si par conséquent nous imposons à la figure de la masse fluide la condition de rester ellipsoïdale, les ellipsoïdes peu aplatis et ceux de JACOBI seront stables, pendant que les ellipsoïdes très aplatis seront instables. (Cf. TAIT et THOMSON, *Natural Philosophy*, 778″, [*f*]).

Voyons maintenant si la stabilité séculaire subsiste encore lorsqu'on considère les mouvements harmoniques d'ordre supérieur.

Cela est évident en ce qui concerne les ellipsoïdes peu aplatis. Considérons en effet un ellipsoïde de révolution qui, se réduisant d'abord à une sphère, aille ensuite en s'aplatissant de plus en plus, de façon que si ses axes sont ρ et $\sqrt{\rho^2 - c^2}$, ρ décroisse de $+\infty$ à c. Nous avons vu au § 11 que tous les coëfficients de stabilité sont d'abord négatifs; puis qu'un certain nombre d'entre eux s'annulent successivement pour devenir positifs. A la fin de ce même paragraphe, nous avons démontré que le premier de ces coëfficients qui s'annule ainsi, c'est celui qui correspond à la fonction de LAMÉ $R^1_{0,2}$ qui se réduit à ρ^2 pour $b^2 = 0$. Si donc ce coëfficient est négatif, c'est à dire si l'inégalité (4) est satisfaite, tous les autres coëfficients seront aussi négatifs. L'ellipsoïde peu aplati est donc stable. (Cf. loc. cit. 778″ [*b*]).

Quant à l'ellipsoïde de JACOBI, il sera stable en ce qui concerne les mouvements harmoniques du n^e ordre, pourvu que les coëfficients de stabilité (corrigés ou non, cela revient au même si $n > 2$) qui affectent des fonctions de LAMÉ du n^e ordre soient tous négatifs. Or nous avons vu au § 12 que tous les coëfficients de stabilité du n^e ordre restent tous négatifs pour tous les ellipsoïdes de JACOBI, à l'exception du coëfficient qui se rapporte à la fonction $R^1_{0,n}$ et que nous appellerons coëfficient principal du n^e ordre. Ce coëfficient principal, d'abord négatif pour les valeurs suffisamment petites de $\frac{b^2}{c^2}$ finit par s'annuler et par devenir positif quand on fait croître $\frac{b^2}{c^2}$.

Nous disons que l'ellipsoïde de JACOBI est *peu allongé* si $\frac{b^2}{c^2}$ est assez petit pour que tous les coëfficients principaux soient négatifs, et *très allongé* si $\frac{b^2}{c^2}$ est assez grand pour que l'un au moins des coëfficients principaux soit positif.

D'après ce que nous avons vu au § 12, il est certain que le premier de ces coëfficients principaux qui s'annule est celui du 3^e ordre, de sorte que l'ellipsoïde limite qui sépare les ellipsoïdes peu allongés des ellipsoïdes très allongés, est celui dont les axes satisfont à la relation

$$\frac{R_1 S_1}{3} - \frac{R^1_{0.3} S^1_{0.3}}{7} = 0.$$

D'après ce qui précède, les ellipsoïdes peu allongés seront stables et les ellipsoïdes très allongés instables en ce qui concerne les mouvements harmoniques d'ordre supérieur au second.

En résumé, si la figure de la masse fluide n'est assujettie à aucune condition, les ellipsoïdes de révolution peu aplatis et les ellipsoïdes de JACOBI *peu allongés jouiront de la stabilité séculaire, pendant que les ellipsoïdes de révolution très aplatis et les ellipsoïdes de* JACOBI *très allongés n'en jouiront pas.*

Ces derniers pourraient toutefois jouir de la stabilité ordinaire sans jouir de la stabilité séculaire. Il nous reste à examiner s'il en est ainsi.

Occupons-nous d'abord des petits mouvements harmoniques du second ordre des ellipsoïdes de révolution. Supposons donc, ce qui n'altère pas ces mouvements, que la figure de la masse fluide soit assujettie à rester ellipsoïdale.

D'après le paragraphe précédent, nous pouvons même (sans altérer les petits mouvements qu'il s'agit d'étudier) supposer que la valeur superficielle du potentiel V est assujettie non seulement à être exprimée par une somme de LAMÉ du 2^d ordre, mais encore soit à être symétrique par rapport au plan des xy, soit au contraire à changer de signe avec z.

La seconde hypothèse est sans intérêt; elle nous conduirait simplement à une sorte de mouvement de précession. Tenons-nous donc à la première et supposons que la figure de la masse fluide est assujettie à être toujours un ellipsoïde ayant un axe dirigé suivant l'axe des z.

Soit

$$\frac{x^2}{\rho^2} + \frac{y^2}{\rho^2} + \frac{z^2}{\rho^2 - 1} = 1$$

l'ellipsoïde envisagé. Nous aurons à considérer les trois fonctions de LAMÉ $R_2 = \rho\sqrt{\rho^2 - b^2} = \rho^2$, $R^1_{0,2}$ et $R^1_{2,2}$. Nous poserons donc:

$$P_1 = R_2 M_2 N_2 = xy$$

$$P_2 = R^1_{0,2} M^1_{0,2} N^1_{0,2} = x^2 - y^2$$

$$P_3 = R^1_{2,2} M^1_{2,2} N^1_{2,2} = 3x^2 + 3y^2 - 6z^2 - 2.$$

Nous poserons de plus:

$$K_1 = \frac{R_1 S_1}{3} - \frac{R_2 S_2}{5} = \frac{R_1 S_1}{3} - \frac{R^1_{0,2} S^1_{0,2}}{5}$$

$$K_2 = \frac{R_1 S_1}{3} - \frac{R^1_{2,2} S^1_{2,2}}{5}.$$

Nous reprendrons d'ailleurs les notations du paragraphe précédent.

La fonction ψ_1 devant satisfaire à l'équation:

$$\frac{d^2\psi_1}{dx^2} + \frac{d^2\psi_1}{dy^2} + \tau^2 \frac{d^2\psi_1}{dz^2} = 0$$

nous l'écrirons:

$$\psi_1 = A(x^2 - y^2) + Bxy + C\left(x^2 + y^2 - \frac{2z^2}{\tau^2}\right) + D$$

A, B, C et D étant des coëfficients constants qu'il s'agit de déterminer et qui jouent le même rôle que les D_q du paragraphe précédent.

L'équation (5) du paragraphe précédent devient:

$$\psi_1 = -4\pi[A'K_1(x^2 - y^2) + B'K_1 xy + C'K_2(3x^2 + 3y^2 - 6z^2 - 2)]$$

A', B', C' étant des coëfficients constants, et elle doit devenir une identité en tenant compte de l'équation de l'ellipsoïde.

On trouve d'ailleurs:

$$\frac{d\psi_1}{dx}\frac{x}{\rho^2} + \frac{d\psi_1}{dy}\frac{y}{\rho^2 - b^2} + \frac{d\psi_1}{dz}\frac{\tau^2 z}{\rho^2 - c^2} = 2A\frac{x^2 - y^2}{\rho^2} + 2B\frac{xy}{\rho^2}$$

$$+ 2C\left(\frac{x^2 + y^2}{\rho^2} - \frac{2z^2}{\rho^2 - 1}\right)$$

$$\frac{d\psi_1}{dy}\frac{x}{\rho^2} - \frac{d\psi_1}{dx}\frac{y}{\rho^2 - b^2} = -\frac{4Axy}{\rho^2} + B\frac{x^2 - y^2}{\rho^2}$$

de sorte que l'équation (6) du paragraphe précédent devient:

$$\frac{x^2 - y^2}{\rho^2}(2A\lambda + 2B\omega i) + \frac{xy}{\rho^2}(2B\lambda - 8A\omega i) + 2C\lambda\left(\frac{x^2 + y^2}{\rho^2} - \frac{2z^2}{\rho^2 - 1}\right)$$

$$= \frac{\lambda(4\omega^2 - \lambda^2)}{\rho^2\sqrt{\rho^2 - 1}}[A'(x^2 - y^2) + B'xy + C'(3x^2 + 3y^2 - 6z^2 - 2)]$$

et elle doit être une identité en tenant compte de l'équation de l'ellipsoïde. On doit donc avoir:

$$(8)\qquad \begin{gathered} A = -4\pi A'K_1, \qquad B = -4\pi B'K_1, \\ C + \frac{D}{\rho^2} = -4\pi C'K_2\left(3 - \frac{2}{\rho^2}\right), \quad -\frac{2C}{\tau^2} + \frac{D}{\rho^2 - 1} = \left(6C'K_2 + \frac{2C'K_2}{\rho^2 - 1}\right)4\pi \end{gathered}$$

et d'autre part:

$$(9)\qquad \begin{gathered} 2A\lambda + 2B\omega i = \frac{\lambda(4\omega^2 - \lambda^2)}{\sqrt{\rho^2 - 1}}A', \qquad 2B\lambda - 8A\omega i = \frac{\lambda(4\omega^2 - \lambda^2)}{\sqrt{\rho^2 - 1}}B', \\ 2C = \frac{4\omega^2 - \lambda^2}{\sqrt{\rho^2 - 1}}C'\left(3 - \frac{2}{\rho^2}\right). \end{gathered}$$

Ce sont là les équations (8) et (9) du paragraphe précédent. On peut y satisfaire:

1° en supposant que C, D et C' sont nuls, ce qui donne en éliminant A, B, A', B'

$$\begin{vmatrix} \lambda\left[2 + \dfrac{4\omega^2 - \lambda^2}{4\pi K_1\sqrt{\rho^2 - 1}}\right], & 2\omega i \\ -8\omega i, & \lambda\left[2 + \dfrac{4\omega^2 - \lambda^2}{4\pi K_1\sqrt{\rho^2 - 1}}\right] \end{vmatrix} = 0$$

ou:

$$\lambda^2\left(2 + \frac{4\omega^2 - \lambda^2}{4\pi K_1\sqrt{\rho^2 - 1}}\right)^2 - 16\omega^2 = 0$$

ou:

$$\lambda\left(2 + \frac{4\omega^2 - \lambda^2}{4\pi K_1\sqrt{\rho^2 - 1}}\right) = \pm 4\omega.$$

Cette équation a toujours ses trois racines réelles si K_1 est positif; l'ellipsoïde jouit donc alors de la stabilité ordinaire, ce que l'on pouvait prévoir; car si K_1 est positif, l'ellipsoïde est peu aplati et, ayant la stabilité séculaire, il doit *a fortiori* jouir de la stabilité ordinaire.

Dans tous les cas, on trouve en prenant le signe $+$ par exemple:

$$\lambda(\lambda + 2\omega) - 8\pi K_1\sqrt{\rho^2 - 1} = 0$$

avec $\lambda = 2\omega$ pour la 3e racine.

La condition de réalité des racines est donc:

$$K_1 > -\frac{4\omega^2}{32\pi\sqrt{\rho^2 - 1}}.$$

Il résulte de là qu'alors même que K_1 devient négatif et que l'ellipsoïde devenant très aplati cesse de posséder la stabilité séculaire, il jouit encore pendant un certain temps de la stabilité ordinaire.

Cela a lieu bien que l'expression:

$$U + \frac{\omega^2 I_0}{2I} \tag{2}$$

ne soit ni minimum, ni maximum et qu'elle soit un »minimax» pour employer une expression consacrée en Angleterre. (Cf. loc. cit. 778″ [*j*]).

2°. Supposons maintenant que A, B, A', B' soient nuls et que C, D et C' ne le soient pas.

D'après la forme même des équations (8) et (9) que nous venons de former, il existera un mouvement harmonique du 2d ordre qui satisfera à ces conditions. Il résulte également de la forme de ces équations, que ce mouvement harmonique ne sera pas altéré si l'on astreint la masse fluide à affecter la figure d'un ellipsoïde de révolution.

Mais si on introduit cette liaison, l'ellipsoïde de révolution quel que soit son aplatissement, jouira non seulement de la stabilité ordinaire, mais de la stabilité séculaire. (Cf. loc. cit. 778'' [a]).

Ainsi certains ellipsoïdes très aplatis possèdent encore la stabilité ordinaire. Il en est probablement de même de certains ellipsoïdes de JACOBI très allongés.

Ne nous occupons plus maintenant que de la stabilité séculaire et cherchons quelles sont, parmi les figures d'équilibre non ellipsoïdales dont nous avons démontré l'existence, celles qui possèdent cette stabilité. A cet effet nous pourrons appliquer le principe de l'échange des stabilités, ce que nous ne pourrions pas faire pour la stabilité ordinaire.

Soient S et S' deux séries linéaires de figures d'équilibre et F une figure de bifurcation commune à ces deux séries. Si pour cette figure, tous les coëfficients de stabilité sont négatifs, excepté un qui est nul, il y aura en général tant dans la série S que dans la série S', des figures très peu différentes de F qui seront stables. Si pour la figure F il y a des coëfficients de stabilité positifs, toutes les figures de S et de S' très peu différentes de F seront instables.

Nous avons considéré diverses séries linéaires de figures d'équilibre, à savoir: la série S des ellipsoïdes de révolution; la série S' des ellipsoïdes de JACOBI; les séries Σ qui ont une figure commune Φ avec la série S; les séries S_3, S_4, ..., S_n, ... qui ont respectivement une figure commune F_3, F_4, ..., F_n, ... avec la série S'. La figure F_n sera un ellipsoïde de JACOBI pour lequel on aura:

$$\frac{R_1 S_1}{3} - \frac{R^1_{0,n} S^1_{0,n}}{2n+1} = 0.$$

D'après ce qui précède, toutes les figures Φ seront des ellipsoïdes de révolution très aplatis, pour lesquels le coëfficient de stabilité relatif à la fonction de LAMÉ $R^1_{0,2}$, sera positif. Donc toutes les figures des séries Σ n'auront pas la stabilité séculaire; c'est à dire qu'elles seront instables pourvu que le fluide soit visqueux et si peu qu'il le soit. Cela n'est vrai toutefois que pour celles de ces figures qui diffèrent très peu de l'ellipsoïde et qui sont les seules dont nous sachions quelque chose. Il n'est pas impossible que les séries Σ contiennent des figures stables très différentes de l'ellipsoïde.

Toutes les figures F_3, F_4, ... sont des ellipsoïdes très allongés pour lesquels un certain nombre de coëfficients de stabilité sont positifs. Un seul est excepté; c'est l'ellipsoïde limite qui sépare les ellipsoïdes très allongés des ellipsoïdes peu allongés et pour lequel tous les coëfficients de stabilité *corrigés* sont négatifs excepté un qui est nul.

Nous avons vu au § 12 que cet ellipsoïde limite n'est autre que F_3.

Donc les figures peu différentes de l'ellipsoïde sont instables (séculairement) dans les séries S_4, S_5, ..., S_n; et stables dans la série S_3.

La forme d'équilibre représentée dans la figure p. 347 est donc une forme d'équilibre stable.

§ 15. *Conclusions.*

Les ellipsoïdes ne sont pas les seules figures d'équilibre que puisse affecter une masse fluide homogène dont toutes les molécules s'attirent d'après la loi de Newton et qui est animée d'un mouvement de rotation uniforme autour d'un axe. Si on laisse de côté certaines formes d'équilibre où la masse en question se subdivise en deux ou plusieurs corps isolés, et d'autres où elle prend une configuration annulaire, il existe encore une infinité de séries de figures d'équilibre.

Toutes ces figures sont symétriques par rapport à un plan perpendiculaire à l'axe de rotation. En outre elles ont un certain nombre de plans de symétrie passant par l'axe (elles en ont toutes au moins un) et certaines d'entre elles sont de révolution.

Parmi ces séries de figures, il n'y en a qu'une qui est stable et elle a deux plans de symétrie seulement (voir la figure p. 347).

Les ellipsoïdes de révolution sont stables s'ils sont moins aplatis que celui qui est en même temps un ellipsoïde de Jacobi; les ellipsoïdes de Jacobi sont stables s'ils sont assez peu allongés.

Dans ces conditions la stabilité subsiste quand même le fluide est visqueux.

Les ellipsoïdes de révolution qui sont plus aplatis que celui qui est en même temps un ellipsoïde de JACOBI, mais dont l'aplatissement reste inférieur à une certaine limite, sont stables si le fluide est parfaitement dépourvu de viscosité; ils ne le sont plus si le fluide est visqueux et si peu qu'il le soit.

Considérons une masse fluide homogène animée originairement d'un mouvement de rotation; imaginons que cette masse se contracte en se refroidissant lentement, mais de façon à rester toujours homogène. Supposons que le refroidissement soit assez lent et le frottement intérieur du fluide assez fort pour que le mouvement de rotation reste le même dans les diverses portions du fluide. Dans ces conditions le fluide tendra toujours à prendre une figure d'équilibre séculairement stable. Le moment de la quantité de mouvement restera d'ailleurs constant.

Au début, la densité étant très faible, la figure de la masse est un ellipsoïde de révolution très peu différent d'une sphère. Le refroidissement aura d'abord pour effet d'augmenter l'aplatissement de l'ellipsoïde, qui restera cependant de révolution. Quand l'aplatissement sera devenu à peu près égal à $\frac{2}{5}$, l'ellipsoïde cessera d'être de révolution et deviendra un ellipsoïde de JACOBI. Le refroidissement continuant, la masse cessera d'être ellipsoïdale; elle deviendra dissymétrique par rapport au plan des yz et elle affectera la forme représentée dans la figure p. 347. Comme nous l'avons fait observer à propos de cette figure, l'ellipsoïde semble se creuser légèrement dans sa partie moyenne, mais plus près de l'un des deux sommets du grand axe; la plus grande partie de la matière tend à se rapprocher de la forme sphérique, pendant que la plus petite partie sort de l'ellipsoïde par un des sommets du grand axe, comme si elle cherchait à se détacher de la masse principale.

Il est difficile d'annoncer avec certitude ce qui arrivera ensuite si le refroidissement continue, mais il est permis de supposer que la masse ira en se creusant de plus en plus, puis en s'étranglant dans la partie moyenne et finira par se partager en deux corps isolés.

On pourrait être tenté de chercher dans ces considérations une confirmation ou une réfutation de l'hypothèse de LAPLACE, mais on ne doit pas oublier que les conditions sont ici très différentes, car notre masse est homogène, tandis que la nébuleuse de LAPLACE devait être très fortement condensée vers le centre.

J'ai cru néanmoins devoir exposer ici ce qui arrive d'une masse homogène qui se contracte lentement et incessamment, car c'était le meilleur moyen de résumer sous une forme un peu plus concrète les principaux résultats de ce long mémoire et de faire comprendre quel intérêt il y aurait à combler les lacunes que j'y ai laissé subsister.

Paris, 16 Juillet 1885.